الإحصاء

ووصف البيانات

مصطفى زايد
دكتوراة فى الإحصاء ، بحوث عمليات

١٩٩٨

٢ ش المهندس إسماعيل أنور
الدقى - الجيزة - ت : ٢٤٩٦٥٦٤

رقم الإيداع بدار الكتب ٨٩/٥٦٠٢
الترقيم الدولى

الإحصاء
ووصف البيانات

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم الطبعة الثانية

هذا الكتاب يُعد بداية منطقية لدراسة علم الإحصاء الذي يقدم خدماته لكافة العلوم الأخرى من خلال وظائفه الأربعة : جمع البيانات، ووصف البيانات، والإستقراء، وصنع القرارات . والكتاب يعرض وظيفة واحدة هي وصف البيانات . وقد صدرت الطبعة الأولى منه عام ١٩٨٤م ، وقد روعي فيها تصنيف المقاييس والأساليب الإحصائية تبعاً لمستوى قياس المتغيرات كما تضمنت مجموعة من المقاييس الإحصائية الهامة التي لم يسبق ظهورها بالمراجع العربية ، مثل دليل الإختلاف الكيفي ومعامل إرتباط جاما ومعامل إرتباط كرامير .

وقد روعي في الطبعة الثانية شمولها على عدد كبير من التطبيقات في كافة المجالات ، مع حلها ، تصل إلى ٢٠٠ تطبيقاً ، كما تم إضافة عدد كبير من أساليب الوصف الإحصائي ليصبح موسوعة في هذا المجال ينتفع منها الباحثين والمهتمين .

وقد تم إدخال مجموعة جديدة من الأساليب الإحصائية تظهر لأول مرة بالمراجع العربية مثل نسبة جيني للتركيز ومعامل إرتباط كندال ومعامل إرتباط لامدا ومعامل إرتباط السلسلتان للرتب ومعامل إرتباط ثيتا .

وفي مجال العلاقات غير الخطية تم عرض الكثير من الصيغ الرياضية التي تمكن من تحويل تلك العلاقات إلى الصورة الخطية كما تم عرض نسبة الإرتباط لقياس الإرتباط في حالة العلاقات غير الخطية .

مصطفى أحمد عبدالرحيم زايد

أغسطس ١٩٨٨م

الريـــاض

تقـديم الطبعة الأولى

هذا الكتاب يعرض الإحصاء للمبتدئين، ولذا رؤي أن يقتصر العرض على إحدى الوظائف الرئيسية للإحصاء «وصف البيانات» وذلك حتى تكون الأمور أكثر وضوحاً وهذا بالإضافة إلى أن وظائف الإحصاء متعددة ويصعب عرضها جميعها في مؤلف واحد .

وقد روعي في هذا الكتاب شموله على عدد كبير من التطبيقات المحلولة وفي مختلف المجالات ، كما تضمن الكتاب مجموعة من المقاييس الإحصائية الهامة التي لم يسبق ظهورها بالمراجع العربية .

ويُعد هذا الكتاب أساساً لدراسات أخرى – أكثر تقدماً – سواء كان ذلك بالنسبة لوظيفة «وصف البيانات» أو للوظائف الأخرى للإحصاء .

والله ولي التوفيـق ،

مصطفى أحمد عبدالرحيم زايد

يناير ١٩٨٤م

الريـــاض

المحتـويات

صفحة

صفحة

صفحة

صفحة

صفحة

صفحة

الملحق :



الباب الأول

مقـدمـة

- تطور علم الاحصــاء
- تعريف الإحصــاء
- المتغيـرات
- مستويات القياس
- وظائف علم الإحصــاء
- الإحصــاء والبحث



الباب الأول
مقدمة

١-١ تطور علم الإحصاء :

تطور علم الإحصاء وتطبيقاته عبر سنوات طويلة، وتم ذلك بجهود كثير من العلماء من دول مختلفة ويعملون في حقول مختلفة. وكان التطور بطيئاً حتى جاء القرن العشرين ليشهد معدلاً هائلاً للتطور في النظريات الإحصائية في مجالات كثيرة .

ويرجع الاهتمام بالإحصاء إلى عصور قديمة، إن تعداد السكان عند قدماء المصريين وفي الصين أمثلة توضح اهتمام الحكومات منذ القدم بالمعلومات الاجتماعية وذلك لأغراض التنظيم والتخطيط في أحوال السلم والحرب .

ويبدو أن كلمة إحصاء (Statistics) قد ظهرت لأول مرة عام ١٧٤٩ وهي مشتقة من الكلمة اللاتينية (Status) أو الإيطالية (Statista) وتعني كلاهما الدولة السياسية. ومن الطبيعي أن تكون الدولة أول من اهتم بجمع البيانات وذلك لإدارة شئون البلاد خاصة عن السكان لأغراض حربية وضريبية، وامتدت بعد ذلك لتشمل إحصاءات حجم السكان والمواليد والوفيات والإنتاج والاستهلاك والثروة ،... إلخ وهكذا بدأ العلم وتطور باعتباره علم الدولة أو علم الملوك .

ولقد كان التطور في علم الإحصاء بصفة عامة ملازماً وموازياً للتطور في نظرية الاحتمالات. فقد نشأت نظرية الاحتمالات على أساس رياضي في (١٤٩٤) بواسطة باسيولي Luca Pacioli . ومن الدراسات الفلكية لكل من كبلر (١٥١٧-١٦٣٠) Kepler وجاليليو (١٥٦٤-١٦٤٢) Galilio قاما

بتطوير نماذج الاحتمالات. غير أن التاريخ الحقيقي لنظرية الاحتمالات بدأ في القرن السابع عشر حيث وضعت أسسها في ١٦٥٤ بواسطة كلا من العالمين : باسكال (١٦٢٣-١٦٦٢) .Pascal, B عالم الرياضيات والفيزياء والفيلسوف الفرنسي - وكذا العالم فرمات (١٦٠٨-١٦٦٥) Fermat . وبعد ذلك بثلاث سنوات قام هيجينز (١٦٢٩-١٦٩٥) Huygens بنشر كتيّب صغير في موضوع المعالجة الرياضية لفرص الفوز في مباريات ورق اللعب وزهرة النرد. وفي نفس الوقت تقريباً قام جرونت (١٦٢٠-١٦٧٤) Graunt بنشر ملاحظاته عن معالجة البيانات المتعلقة بالحكومة - خاصة في النواحي الطبيعية والسياسية والتجارية والنمو والوفيات والأمراض .

وقد كان العمل الذي قام به هيجينز دافعاً للكثيرين لدراسة النظريات والمشاكل المتعلقة بمباريات الصدفة ومنهم برنوللي (١٦٥٤-١٧٠٥) Bernoulli ودي موافر (١٦٦٧-١٧٥٤) De moivre وأربوثنوت Arbuthnott ولابلاس (١٧٤٩-١٨٢٧) Laplace وجاوس (١٧٧٧-١٨٥٥) Gauss .

وقد ظهر اهتمام كبير بتطبيق النظريات والطرق الإحصائية في العلوم الاجتماعية. فقد أوضح كيتيلية (١٧٩٦-١٨٧٤) عالم الفلك الاجتماعي البلجيكي إمكان استخدام الاحتمالات والإحصاء لوصف وتفسير الظواهر الاجتماعية والاقتصادية وقدم مساهمات هامة في الطرق الإحصائية وفي تنظيم وإدارة الإحصاءات الرسمية - وقدم كذلك طريقة عامة للقياس في الأنثروبولوجيا. وقد ساهم عالم النفس الإنجليزي جالتون (١٨٢٢-١٩١١) Galton في تطبيق الطرق الإحصائية في علم النفس، ووضع أساس علم القياس النفسي Psychometrics وبدأ دراسة موضوع الارتباط والانحدار الذي اهتم به وطوره بعد ذلك عالم الإحصاء الإنجليزي كارل بيرسون

(١٨٥٧-١٩٣٦) .Pearson, k بالإضافة إلى مساهمات أخرى هامة. كما قدم سبيرمان (١٨٦٣-١٩٤٥) Spearman عالم النفس الإنجليزي مساهمات فعالة في دراسة الارتباط ويُعد من الرواد في دراسة وتطوير التحليل العاملي .

وقدم عالم الإحصاء الإنجليزي جوست (١٨٧٦-١٩٣٧) Gosset مساهمات هامة في مجال التحليل الإحصائي وخاصة في تفسير البيانات المتعلقة بالعينات . كما يُعد من الرواد المهتمين بتحليل نتائج العينات الصغيرة .

وخلال الفترة السابقة كان الإهتمام كله مركزاً على المفهوم الكلاسيكي للاحتمال . إن مفهوم التكرار النسبي لم يظهر بصورة ملموسة إلا في بداية القرن العشرين حيث تم صياغتها وظهورها في إطار منطقي بمعرفة فون مايسيس Von Mises .

وعلى الرغم من أن الرواد من علماء الإحصاء كان اهتمامهم بوظيفة الاستقراء فإن الجانب الأعظم من النظرية الإحصائية تم اكتشافه بعد عام ١٩٢٠ تقريباً . فمنذ مطلع القرن العشرين كان الاهتمام منصباً على تطبيق الإحصاء على مشاكل علوم الحياة وعلى التجارب الزراعية والصناعية . كما أن العمل في هذه المرحلة كان مكثفاً ومركزاً على التحليل الإحصائي وأساسه المنطقي ، وتمخض عن ذلك مساهمات عظيمة قدمها عالم الإحصاء الإنجليزي فيشر (١٨٩٠-١٩٦٢) Fisher ومن أعماله البارزة نظرية التقديرات، وتوزيعات المعاينة للعينات الصغيرة، وتحليل التباين وتصميم وتحليل التجارب. ومن العلماء الذين ساهموا كثيراً في نظرية التقديرات واختبارات الفروض كلا من بيرسون .Pearson, E.S وكذلك نيمان Neyman – ويُعد الثلاثي فيشر – بيرسون – نيمان مؤسسي منهج الاستقراء

الإحصائي والذي يعرف حالياً بالاتجاه الكلاسيكي. وهو يعتمد على المعلومات المتاحة من العينة فقط .

وقد ظهر في هذه الفترة اتجاه جديد يعرف بالاستقراء البيزياني Bayesian inference وذلك بجهود كل من جفريز Jeffreys ورامزي Ramsey وديفنتي De Finetti وجود Good وسافج Savage ولندلي Lindley وآخرون. ويعتمد الاستقراء هنا على بيانات العينة بالإضافة إلى المعلومات المسبقة Prior information .

وشهدت هذه الفترة أيضاً عملا مكثفاً كان فيها الاهتمام منصباً على صنع القرارات، مما أدى إلى نشوء وظيفة حديثة للإحصاء تحت اسم نظرية القرارات الإحصائية Statistical decision theory ويرجع ذلك إلى أعمال والد Wald (١٩٣٩) ونيومان Neuman, J ومورجنسترن Morgenstern, o. .

وقد صاحب هذا التطور الكبير في النظريات الإحصائية بداية ظهور مجموعة من التخصصات المختلفة تهتم بمجالات وأهداف خاصة - وقد بلغ هذا التطور قدراً هائلاً يكاد يظهرها وكأنها علوماً مستقلة. ومن هذه التخصصات: بحوث العمليات Operations Research والإحصاء السكاني Demography ومراقبة الجودة Quality control والاقتصاد القياسي Econometrics .

ونظراً لاعتماد العلوم المختلفة على الرياضيات في فهم ظواهرها وقياسها وتفسيرها ، فقد أفردت لها فروعاً خاصة تهتم بدراسة ظواهرها باستخدام الأساليب الإحصائية والرياضية ومنها على سبيل المثال الإحصاء الحيوي Biostatistics والاجتماع الرياضي Mathematical sociology والقياس الاجتماعي Social measurement وعلم النفس الرياضي Mathematical Psychology والقياس النفسي Psychometrics والقياس التربوي Educational Measurement والاقتصاد الرياضي Mathematical economics والتاريخ الاقتصادي الجديد أو القياس التاريخي Cliometrics .

١ – ٢ تعريف الإحصاء :

كلمة إحصاء (Statistics) لها ثلاث معان :

(١) الإحصاءات أو البيانات . مثال ذلك إحصاءات السكان والمواليد والوفيات والإنتاج – الصادارات – الاستهلاك – ..

(٢) المؤشرات المحسوبة من عينة (العينة هي مجموعة جزئية من الوحدات محل الدراسة) .

(٣) علم الإحصاء : وهو فرع من فروع الرياضيات يشمل النظريات والطرق الموجهة نحو جمع البيانات ووصف البيانات والاستقراء وصنع القرارات .

وهذه الوظائف الأربعة نعرضها بإيجاز في الفصل ١ – ٥

١ – ٣ المتغيرات :

المتغير هو أي ظاهرة أو حدث أو خاصية تأخذ قيماً تتغير من ظرف لآخر. وتنقسم المتغيرات إلى مستمرة وغير مستمرة (متقطعة) . والمتغير المستمر هو ذلك الذي يأخذ قيماً لأي درجة من الدقة – مثل الطول – الوزن – درجة الحرارة . أما المتغير غير المستمر فهو الذي يأخذ قيماً معينة فقط – مثل عدد الأولاد في الأسرة ، عدد الطلاب في الفصل .

وهناك تقسيم آخر للمتغيرات، حيث تنقسم إلى متغيرات مستقلة ومتغيرات تابعة. فعندما نبحث في الأثر الذي يحدثه متغير (س) في آخر (ص) كأثر التدريب على الإنتاجية نقول أن (س) متغير مستقل و (ص) متغير تابع .

والمتغير هو الوحدة الأساسية للتحليل الإحصائي ويمكن تعريفه بأنه مجموعة من العناصر أو التقسيمات غير المتداخلة. وهذه المجموعة من

التقسيمات تكون مقياس Scale . ولغرض التحليل الإحصائي يتم تقسيم المقاييس إلى أربعة أنواع تمثل مستويات مختلفة للقياس هي المستوى الإسمي والترتيبي والفتري والنسبي. وفيما يلي تعريف لهذه المستويات .

١ - ٤ مستويات القياس :

لغرض استخدام المقائيس والأساليب الإحصائية فإنه يجب تحديد مستوى القياس للبيانات أو المتغيرات. ولهذا الغرض يتم كما ذكرنا تقسيم مستويات القياس إلى أربعة أنواع هي مستوى القياس الاسمي والترتيبي والفتري والنسبي. وهذه المقاييس تختلف من حيث كمية المعلومات التي تحويها وبالتالي تختلف العمليات الحسابية والإحصائية التي يمكن إجراؤها. وتعرف البيانات الاسمية والترتيبية بالبيانات الكيفية . أما البيانات الفترية والنسبية فتعرف بالبيانات الكمية .

(أ) البيانات الكيفية Qualitative .

(١) المقياس الاسمي Nominal .

يعد أقل مستوى للقياس، وهو مجرد تقسيم أو تصنيف بالاسم فقط، ودون تداخل مثال ذلك تقسيم الأشخاص حسب الجنس (ذكور - إناث)، وحسب الجنسية (مصري - سعودي - عراقي - ...) وتقسيم الجرائم إلى (قتل - خطف - سرقة - ...) وتقسيم الكتب والمراجع بالمكتبة حسب الموضوع (المعارف العامة - الفلسفة - الديانات - العلوم الاجتماعية - ...) .

(٢) المقياس الترتيبي Ordinal scale .

وهو أعلى مستوى من السابق حيث يتم التقسيم على أساس الرتبة أو الأهمية النسبية. مثال ذلك درجات الطلاب على أساس : ممتاز - جيد جداً - جيد - مقبول - ضعيف ، أو توزيع السكان حسب الحالة التعليمية :

أمي – إبتدائي – ثانوي – جامعي – ماجستير – دكتوراه . وفي هذا القياس يمكن ترتيب القيم وإجراء المقارنات حيث يمكن القول أن الحاصل على تقدير جيد مستوى تحصيله أفضل من الحاصل على تقدير مقبول . مثل هذا الترتيب والمقارنة لانستطيعها في المقياس الاسمي. على أنه في هذا المقياس لانستطيع تحديد مقدار الفروق بين القيم .

(ب) البيانات الكمية Quantitative.

(٣) المقياس الفتري Interval scale .

وهذا المقياس يُعد أقوى من السابق، حيث هنا يمكن تحديد الفروق بين القيم. مثال ذلك درجات الحرارة المئوية (والفهرنهيت) ودرجات الاختبارات الرقمية : ٦٥ ، ٨٠ ، ٤٠ ،... وكذلك عدد ساعات الوقت الإضافي للعمال باعتبارها مقياساً لمستوى التوظف. ويؤخذ على هذا القياس عدم وجود نقطة الصفر المطلق بمعنى أن الصفر هنا لايقيس حالة انعدام الخاصية. وبالتالي لانستطيع إجراء النسبة بين القيم ، فمثلا لانستطيع القول بأن درجة الحرارة (٢٠) تساوي ضعف درجة الحرارة (١٠) أو أن الطالب الحاصل على (١٠) درجات مستواه في التحصيل يساوي خمسة أضعاف آخر حاصل على (٢) درجة .

(٤) المقياس النسبي Ratio .

ويُعد أقوى مستويات القياس بما يسمح بإجراء النسب بين قيم المتغيرات.

مثال ذلك الأوزان والأطوال ودرجات الحرارة (كلفن) والسرعة.

ويلاحظ أن المقاييس الأربعة تم عرضها بالترتيب حسب قوة المقاس، بحيث يحمل كل مقياس مزايا المقاييس السابقة – بالإضافة إلى مزايا أخرى .

وفي هذا الصدد نشير إلى نقطتين هامتين : الأولى هي أنه كلما زاد مستوى القياس للمتغيرات، أي زادت الدقة في القياس كلما أمكن استخدام مقاييس وأساليب إحصائية على درجة أفضل. والثانية هي أن المتغيرات بمستوى قياس معين يكون التعامل معها بالأساليب الإحصائية المخصصة لهذا المستوى من القياس ، كما أنه يمكن أيضاً استخدام الأساليب الإحصائية المخصصة لمستويات القياس الأقل .

(١ – ٥) وظائف علم الإحصاء :

يقدم علم الإحصاء أربعة وظائف كبرى هي جمع البيانات – وصف البيانات – الاستقراء – صنع القرارات .

وهذه الوظائف لاغنى عنها لأي باحث وفي أي عمل وفي أي فرع من فروع العلوم أو المعرفة : في علوم الحياة والطب والوارثة والكيمياء والفيزياء والأنثروبولوجيا والاجتماع والسياسة وعلم النفس والتربية والخدمة الاجتماعية والجغرافيا والتاريخ والاقتصاد والإدارة والمحاسبة والمكتبات والصناعة والزراعة... إلخ .

إن المعارف والقوانين في كل هذه العلوم تجد برهانها، وتأكيدها أو رفضها في استخدام الأساليب الإحصائية .

(١ – ٥ – ١) جمع البيانات :

عملية جمع البيانات تُعد أقدم وظائف الإحصاء، وهي تتضمن عدداً من الأنشطة يختلف مداها من مجرد بحث يقوم به فرد إلى فريق بحث من عدة مئات أو آلاف. وجمع البيانات يكون بعدد من الأساليب وحسب طبيعة البحث أو العمل، فقد يكون ذلك باستخدام المجموعات المكتبية أو عن طريق تصميم تجربة أو الملاحظة (المنتظمة أو بالمعايشة) أو عن طريق الاستبيان أو الاستبار أو الإخباريين أو عن طريق الاختبارات .

ومهما يكن الأمر فإن جمع البيانات قد يتم إما بفحص كل وحدات المجتمع محل الدراسة أو بفحص جزئي (عينة) .

إن عملية جمع البيانات ليست عملية منفصلة عن وظائف الإحصاء الأخرى - فهناك صلة وثيقة - فالهدف واحد وهو الحصول على معلومات أو نتائج - وذلك يكون باستخدام مقاييس وأساليب وصف البيانات - وذلك بعد جمعها - وإذا كانت هذه البيانات خاصة بعينة أي بجزء من المجتمع فإن وصف المجتمع يتطلب استخدام أساليب الاستقراء.. وهذه المقاييس والأساليب لها شروط ومتطلبات يجب مراعاتها وتوفيرها عند جمع البيانات وذلك باستخدام التصميم التجريبي المناسب أو تصميم استمارة استبيان مناسبة واختيار طريقة المعاينة المناسبة وحجم العينة المناسب ومراعاة توفير مستوى القياس المناسب للمتغيرات.. إلخ . كما أن البيانات التي يتم جمعها يجب أن تكون محل ثقة حتى تكون النتائج المستخلصة منها محل ثقة . أي يجب أن يتوافر فيها الصدق والثبات Validity and reliability . إن تحديد ذلك واختباره يكون غالباً باستخدام الأساليب الإحصائية .

إن استخدام العينات الإحصائية في جمع البيانات أصبح شيئاً حتمياً يفرضه المنطق والاعتبارات الاقتصادية والعملية .

(١) التكاليف والإمكانيات : إن فحص وحدات المجتمع كلها يكلف الكثير من الجهد والمال كما أنه يتطلب الاستعانة بعدد كبير من المساعدين ويمكنك تصور ذلك مثلاً ببحث يجرى لمعرفة نسبة الأمية في دولة أو مدينة أو نسبة الذكاء بين فئة من الطلاب - نسبة المدخنين - نسبة المراجع التالفة بإحدى المكتبات العامة .

(٢) السرعة في إظهار النتائج : إن السرعة مطلوبة بصفة عامة في

إنجاز الأعمال – غير أن هناك حالات يكون فيها عامل الوقت محدداً لطريقة جمع البيانات كما في حالة استطلاع الرأي العام بخصوص تقييم برامج التليفزيون والإذاعة والصحافة، وكذا الفحص بغرض مراقبة جودة الإنتاج وفحص البضاعة بالمخازن بمعرفة مراجع الحسابات. مثل هذه الحالات تتطلب استخدام العينات .

(٣) دقة البيانات والمعلومات : إن فحص جزء فقط من المجتمع يمكن من استخدام باحثين ومساعدين مدربين وعليه تكون البيانات التي يتم جمعها وبالتالي المعلومات المستخرجة منها تكون أكثر دقة .

(٤) صعوبة أو استحالة فحص المجتمع بالكامل :

(أ) بسبب كبر حجمه : كما في حالة تقدير الثروة السمكية أو الحشرات في مجتمع ما ، فحص إنتاج مصنع، فحص البضاعة المشتراة لمصنع أو متجر .

(ب) عدم إمكان تحديد المجتمع : كما في علم الوراثة مثلا، عند دراسة انتقال الصفات من الآباء للأبناء – وعند تصميم التجارب فمثلا يتم تجربة الأدوية على عينة فقط من الحيوانات . ومن الأمثلة الأخرى على المجتمعات التي لايمكن تحديدها مجتمع المستفيدين من المكتبة العامة، وكذا مجتمع المنحرفين، وهناك حالات يكون فيها المجتمع متغيراً مثل مجتمع المرضى بالمستشفى أو مجتمع المسجونين أو عملاء سوق معين .

(جـ) الفحص قد يكون متلفاً للوحدات : وأمثلة ذلك فحص وتحليل الأطعمة والأدوية والمفرقعات والقنابل. أي أن استخدام العينات يؤدي إلى تقليل الخسائر الناجمة عن تلف الوحدات المفحوصة .

(د) الفحص قد يكون مؤذياً للوحدات : مثال ذلك مثال فحص دم

المريض وتجربة الأدوية خاصة على الإنسان، وطرق التدريس والأذى قد يمس مشاعر الأشخاص محل البحث كما في البحوث التى تجرى على المنحرفين والشواذ والمرضى .

(هـ) البيانات والتسجيلات التاريخية قد لاتكون كاملة :

(٥) كل مجتمع يمكن النظر إليه على أنه عينة من مجتمع أكبر منه، وكذا اعتباره عينة من حيث الزمان .

والمعاينة العشوائية ويطلق عليها أيضاً المعاينة الاحتمالية Probability Sampling وكذلك المعاينة الإحصائية Statistical Sampling هي عملية معاينة يكون فيها لكل وحدة من وحدات المجتمع فرصة أو احتمال للظهور في العينة وهذا الاحتمال يمكن حسابه ولا يساوي صفرا ، وطرق المعاينة العشوائية هي :

١ - المعاينة العشوائية البسيطة .

٢ - المعاينة المنتظمة .

٣ - المعاينة الطبقية .

٤ - المعاينة العنقودية .

٥ - المعاينة متعددة المراحل .

ويمكن أن يحوى تصميم المعاينة على اثنان أو أكثر من هذه الطرق في آن واحد، على أنه يجب ملاحظة أن كل أسلوب للمعاينة له صيغة الرياضية الخاصة في تحديد حجم العينة وفي توزيعها وفي عرض نتائج البحث وقياس دقة النتائج، ومجال ذلك كله في المراجع المتخصصة في المعاينة .

(١ - ٥ - ٢) وصف البيانات :

إن المقاييس والأساليب هنا موجهة نحو وصف البيانات أي وصف الظواهر والأحداث والأشياء محل البحث .

إن البيانات المتاحة – المنشورة أو التي تم جمعها – تسمى بيانات خام أو أولية – ذلك أنها تكون غير مجهزة – فهي لاتفصح إلا عن القليل من المعلومات . كما أنه يستحيل استخلاص المعلومات منها . وفي سبيل ذلك نستعين بأساليب ومقاييس وصف البيانات . إن هذه الأساليب كثيرة ومتنوعة فهي تختلف حسب عوامل أهمها عدد المتغيرات ومستوى قياسها . على أنه يمكن هنا عرض المقاييس في مسميات عامة ودون الدخول في المقاييس الفرعية والمتعددة والتي تندرج تحتها. ويعرض الجدول التالي تقسيماً لهذه المقاييس حسب عدد المتغيرات .

جدول (١-١) مقاييس وصف البيانات

عدد المتغيرات التابعة / عدد المتغيرات المستقلة	واحــــد	اثنــان أو أكثــر
لا يوجــــد	(أ) مقاييس وصف متغير وحيد	(ب) مقاييس وصف عدة متغيرات .
واحــــد	(جـ) مقاييس وصف العلاقة بين متغيرين .	(د) مقاييس وصف العلاقة بين متغير مستقل وعدة متغيرات تابعة .
اثنـان أو أكثـر	(هـ) مقاييس وصف العلاقة بين عدة متغيرات مستقلة ومتغير تابع .	(و) مقاييس وصف العلاقة بين عدة متغيرات مستقلة وعدة متغيرات تابعة .

وفيما يلي عرض موجز :

(أ) أساليب وصف متغير وحيد :

(١) الجداول التكرارية (التوزيع التكراري) .

(٢) العرض البياني .

(٣) النسب والمعدلات .

(٤) مقاييس النزعة المركزية .

المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال – المتوسط الهندسي – المتوسط التوافقي .

(٥) مقاييس التشتت .

المدى – الانحراف الربيعي – الإنحراف المتوسط – التباين – الإنحراف المعياري – معامل الاختلاف – دليل الاختلاف الكيفي Index of qualitative variation .

(٦) مقاييس الالتواء .

(٧) مقاييس التفرطح .

(٨) مقاييس المركز النسبي .

الرتبة المئينية – الدرجة المعيارية .

(ب) أساليب وصف عدة متغيرات :

مقاييس المجموعة أ يمكن استخدامها .

(١) الأرقام القياسية .

(٢) التحليل العاملي .

(جـ) أساليب وصف العلاقة بين متغيرين :

(١) التوزيع التكراري المزدوج .

(٢) مقاييس الارتباط .

بيرسون - سبيرمان - جاما - كندال - لامدا - كرامير
السلسلتان - السلسلتان الثنائي - الرباعي - ...

(٣) مقاييس التقدير : الانحدار .

(٤) مقاييس التقدير : السلاسل الزمنية .

(د) أساليب وصف العلاقة بين متغير مستقل وعدة متغيرات تابعة :

مقاييس المجموعات ب ، جـ ، هـ يمكن استخدامها .
يلاحظ أن المتغيرات التابعة تعالج واحدا واحدا .

(هـ) أساليب وصف العلاقة بين عدة متغيرات مستقلة ومتغير تابع :

(١) الارتباط المتعدد Multiple correlation .

(٢) الارتباط الجزئي Partial correlation .

(٣) ارتباط الجزء Part correlation .

(٤) الانحدار المتعدد Multiple regression .

(٥) تحليل التمايز Discriminant .

(٦) تحليل المسار Path analysis .

(و) أساليب وصف العلاقة بين عدة متغيرات مستقلة وعدة متغيرات تابعة:

(١) الارتباط الشرعي Canonical correlation .

(١-٥-٣) الاستقـراء(★):

هذه الوظيفة لها أهمية كبيرة - وهي تمكن الباحث من الوصول إلى تعميمات عن المجتمع على أساس المعلومات المتاحة من عينة منه . وفي هذه الحالة فإن أساليب ومقاييس الوصف التي سبق ذكرها - يقتصر وصفها على ذلك الجزء (العينة) فقط من المجتمع - ومن هنا تأتي أهمية وظيفة

(★) عرض شامل لهذه الوظيفة في كتاب «الاحصاء والإستقراء» للمؤلف .

الاستقراء – فهي تمكننا من وصف المجتمع (التعميم) باستخدام بيانات العينة. إن القوانين في العلوم الطبيعية والاجتماعية تجد برهانها عند الوقائع والحقائق الإحصائية ولذا يعد الاستقراء الإحصائي (Statistical inference) Inductive statistics أساساً لتطور المعرفة العلمية باعتباره البرهان لهذه القوانين .

ووظيفة الاستقراء تحقق مطلبين أساسيين في البحث : الأول تقدير خواص المجتمع والثاني اختبارات الفروض حول هذه الخواص .

ولا تقتصر هذه الوظيفة على مجرد الاستقراء بل تقدم لنا تقييماً عن مدى دقة هذا الاستقراء وأكثر من ذلك فهي تمكننا من التحكم في مستوى الدقة وذلك بعدة طرق منها استخدام أسلوب مناسب للمعاينة وحجم مناسب للعينة . وباختصار فإن هذه الوظيفة للإحصاء تمدنا بالاستقراء المنطقي .

إن الأساليب المتبعة في الاستقراء متعددة وتختلف حسب طبيعة الخاصية محل الاستقراء .

ونعرض فيما يلي تقسيماً لهذه الخواص ، مع بعض الأمثلة الإيضاحية.

(١) الاستقراء حول شكل التوزيع :

– اختبار جودة التوفيق أي اختبار ما إذا كانت البيانات تتبع توزيعاً معيناً كالتوزيع الطبيعي أو ذي الحدين أو بواسون... إلخ .

– اختبار ما إذا كانت توزيعات عدة مجتمعات متماثلة .

(٢) الاستقراء حول النسبة :

– تقدير نسبة البطالة في مجتمع – نسبة الأمية – نسبة الذكور – نسبة الأسر الفقيرة – نسبة الأجانب – نسبة المرضى بمرض معين – نسبة النجاح للطلاب – نسبة الغياب – نسبة المراجع التالفة في المكتبة – نسبة المراجع

المفقودة – نسبة المراجع المتأخرة لدى المستعيرين – نسبة الإنتاج المعيب – نسبة من يحملون فصيلة دم معينة – نسبة المعوقين ... إلخ .

– اختبار فرض تساوي النسب في عدة مجتمعات .

(٣) الإستقراء حول المتوسط الحسابي :

– تقدير متوسط الدخول – متوسط الأجور – متوسط درجات الطلاب – متوسط إنتاج العامل – متوسط إنتاج الفدان .

– مقارنة طرق لتدريس – طرق الحفظ والقراءة – مقارنة طرق العلاج – مقارنة العقاقير – مقارنة الدخول أو الأجور في عدة مجتمعات – مقارنة ذكاء الأطفال في الريف وفي الحضر مثلاً – مقارنة طرق التدريب – مقارنة طرق أداء عمل معين .

(٤) الاستقراء حول التباين والإنحراف المعياري :

– تقدير التباين والانحراف المعياري .

– اختبار تجانس أو تساوي التباينات في عدة مجتمعات .

(٥) الاستقراء حول الارتباط بين المتغيرات :

– تقدير معامل الارتباط بين إنتاج العامل وأجره بين الأسعار والأجور – بين الجريمة والبطالة – الإعلان والمبيعات – بين التحصيل العلمي والذكاء التحصيل والحالة الاجتماعية والاقتصادية – بين التدخين ومرض معين – العلاج والشفاء – التطعيم والإصابة بالمرض .

(٦) الاستقراء حول تقدير المتغيرات بدلالة أخرى

(٧) الاستقراء حول عشوائية البيانات

(٨) الاستقراء حول القيم المتطرفة

(١-٥-٤) صنع القرارات Decision making :

تعد هذه الوظيفة أحدث وظائف علم الإحصاء وتتميز بوجود هدف (عائد ، ربح ، منفعة ،...) يراد تحقيقه وذلك باختيار أحد البدائل المتاحة على أساس منطقي .

إن عملية صنع القرار تستلزم تحديد النموذج الملائم والعناصر التي يلزم توفيرها :

(١) هدف محدد أو عدة أهداف وغالباً ما يكون هدف اقتصادي (وقد يكون هناك أهداف أخرى لمراعاة الاعتبارات الاجتماعية والنفسية والسياسية) .

(٢) بيان بكل الأنشطة (البدائل) المتاحة .

(٣) العائد Outcome المتعلق بكل نشاط .

(٤) الاحتمال المتعلق بكل عائد .

(٥) تقييم للنتائج المتعلقة بكل تشكيلة أو توفيق Combination (من البدائل وعوائدها) .

(٦) القيود المفروضة على الحل .

(٧) العلاقة بين القيود والأنشطة .

(٨) قاعدة لاتخاذ القرار الأمثل Criterion for decision .

(٩) أسلوب لتقييم كل البدائل وفقاً لقاعدة القرار .

ونماذج صنع القرار يتم تقسيمها إلى أربعة مجموعات رئيسية :

(أ) نماذج التأكد Certainty أو النماذج المحددة Deterministic في هذه النماذج تكون عناصر النموذج محددة أي توافر معلومات كاملة. والحل الأمثل في هذه الحالة هو الذي يعطي أكبر عائد ممكن .

(ب) نماذج المخاطرة Risk أو النماذج العشوائية Stochastic أو الاحتمالية Probabilistic . في هذه النماذج يكون بعض عناصر النموذج غير محددة تماماً ولكن يمكن وصفها بتوزيع احتمالي .

ولهذه النماذج يتوافر مجموعة من قواعد اتخاذ القرار وهي :

(١) القيمة المتوقعة Expected Value .

(٢) القيمة المتوقعة والتباين Combined Expected value and varianc .

(٣) مستوى معين مأمول Known aspiration level .

(٤) إختيار القيم الأكثر احتمالاً Most Likely future criterion .

(جـ) نماذج عدم التأكد Uncertainty .

العائد هنا يكون غير معلوم، ولا يمكن وصفه حتى بصورة احتمالية. ويوجد لهذه النماذج عدة قواعد لاتخاذ القرار :

(١) قاعدة التفاؤل Optimism أو أكبر الأكبر Maximax (Baumol, W ١٩٦١) .

(٢) قاعدة التشاؤم Pessimism أو أكبر الأقل Maximin (والد Wald) .

(٣) قاعدة هيروتس (١٩٥١) Hurwicz .

(٤) قاعدة الأسف Minimax regret سافج ١٩٥١ Savage, L.J. .

(٥) قاعدة بيز Bays أو لا باس Laplace .

(٦) تشكيلة من السياسات البديلة Mixed strategy .

(د) نماذج الصراع Conflict أو المنافسة Competition .

هنا يواجه صانع القرار بمنافس يتصرف بحكمة كما في حالة نظريات المباريات Game theory . وقاعدة القرار التي تتبع في هذه الحالة هي «أكبر الأقل» Maximin .

إن صنع القرارات عملية يهتم بها عدة تخصصات - كلها تتبع علم الرياضيات - وهذه التخصصات هي :

(١) نظرية القرارت الإحصائية Statistical decision theory

(٢) نظرية القرارات Decision theory

(٣) بحوث العمليات Operations research

ويمكن اعتبار نظرية القرارات – والتي تعد امتداداً لنظرية القرارات الإحصائية – تختص بالنظريات والمبادئ أي منطق صنع القرارات. أما بحوث العمليات فهي تحوي الأساليب والنماذج التي تستخدم فعلا في صنع القرارات، أي أنها تُعد منفذاً لنظرية القرارات. وهذه النماذج تُعد محددة deterministic أو احتمالية (عشوائية) حسب ما إذا كانت البيانات محددة أو احتمالية. فمثلاً نماذج المخزون Inventory models نجد بها نماذج محددة ونماذج احتمالية، وكذا نماذج البرمجة الرياضية Mathematical programming فإنها تُعد نماذج محددة – كما أنها قد تُعد نماذج عشوائية Stochastic programming .

وفيما يلي نعرض بعض النماذج والأساليب الشائعة والمستخدمة في صنع القرارات .

البرمجة الخطية	Linear Programming
البرمجة التربيعية	Quadratic Programming
البرمجة غير الخطية	Nonlinear Programming
البرمجة الديناميكية	Dynamic Programming
البرمجة بأعداد صحيحة	Integer Programming
النماذج الكلاسيكية للحلول المثلى	Classical optimization
نماذج البحث	Search models
نظرية المباريات	Game theory
نظرية صفوف الانتظار	Queueing theory
نماذج المخزون	Inventory models
نماذج الإحلال	Replacement models
نظرية المتانة	Reliability theory

ويلاحظ أن هذه النماذج والأساليب – وإن كانت تستهدف أساساً صنع القرارات فإنها تمدنا أيضاً بمعلومات هامة تنتمي إلى وظيفة الوصف والاستقراء – وبخاصة للأنساق المعقدة – فمثلاً نماذج صفوف الانتظار فإنها تسهم في صنع القرارات مما يؤدي إلى تحسين مراكز الخدمة – حيث تمدنا بالمعدل الأمثل لأداء الخدمة وكذا العدد الأمثل لوحدات الخدمة . وبالإضافة إلى ذلك فإنها تسهم في وصف مركز الخدمة حيث تمدنا مثلاً بمتوسط عدد العملاء في صف الانتظار ومتوسط وقت انتظار العميل في سبيل أداء الخدمة .

١-٦ الإحصاء والبحث :

إن العمل البحثي شاق ومضني، وعلى الباحث إذا كان جاداً في تقديم معارف علمية أن يكون عمقا نظريا وعمليا في ناحيتين : الأولى هي مادة بحثه أو حقله والثانية هي القواعد المنهجية. هذه القواعد المنهجية يمكن تصورها كشجرة في الحقل جذورها المنطق وهو المصدر الأساسي للمعرفة العلمية، فهو العلم المختص بقواعد الاستدلال والمعرفة الصحيحة، وهو حامل الشجرة وحاميها من السقوط أو التزحزح بسبب الرياح الغريبة والأهواء المتحيزة. وساق الشجرة مناهج البحث فهي التي تفحص قواعد المعرفة وتأخذ منها وتمتصها حسب حاجة الإثبات العملية. والأساليب الإحصائية والرياضية يمكن تمثيلها بفروع الشجرة فهي المنسق والمنفذ والمنتج فهي التي تطرح الثمار وتحملها وتعرضها على أفضل مايكون .

ويحدد لنا المنطق منهجان للبحث الأول منهج الاستنباط Deduction والثاني منهج الإستقراء Induction كما يضع القواعد والضوابط اللازم اتباعها

في كل منهما، غير أنه كثيراً ما يخلط البعض بين مناهج البحث وطرق جمع البيانات وترتب على ذلك الإشارة إلى عدد كبير من مناهج البحث بالمراجع العربية كالمنهج التاريخي والمنهج التجريبي ومنهج المسح ومنهج دراسة الحالة. وحتى يتجنب الباحث بصفة عامة أية أخطاء منهجية تترتب على ذلك فإن عليه التقيد بالمناهج المحددة في علم المنطق، وهي على أي حال تغطي احتياجات ومتطلبات البحوث على اختلاف أنواعها ومهما كانت طريقة جمع البيانات كما أن عليه استخدام الأساليب الإحصائية والرياضية فهي التي تنفذ المنطق، وتحقق شروطه ومتطلباته، وباختصار هي الأساليب العلمية المخصصة لتنفيذ خطوات البحث أياً كان مجاله في العلوم الاقتصادية، الإدارية، الاجتماعية، الهندسية، الزراعية، الطبية،.. إلخ، ومهما كان مدخل البحث(★) المستخدم : التجريبي أو التاريخي أو المسح أو دراسة الحالة .

فالباحث مهما كان مدخله عليه أن يجمع بياناته ، وهو في سبيل ذلك، وكما سبق أن ذكرنا يجد نفسه مضطراً لاستخدام أساليب المعاينة العشوائية أو الإحصائية، فهي تحقق الموضوعية في الاختيار والبعد عن الذاتية والتحيز وهي تقدم عينة ممثلة للمجتمع تصلح لتعميم النتائج على المجتمع كما تمكن

(★) يمكن الرجوع للمراجع التالية وهي توضح دور الأساليب الإحصائية في تنفيذ البحوث على اختلاف أنواعها :

- مصطفى زايد، الإحصاء والبحث التاريخي، المؤسسة العصرية للنشر والترجمة، الجيزة، ١٩٨٧ .
- أحمد عبادة سرحان، ثابت محمود، مقدمة العينات، دار الكتب الجامعة ١٩٧١ .
- أحمد عبادة سرحان، ثابت محمود، تصميم وتحليل التجارب .

- Cambell, Donald T. and Stanley, J.C. (1963), Experimental and Quasi - experimental designs for research, Rand Mcnally, chicago.
- Rosenberg, M. (1968), The Logic of Survey analysis, basic books, New york.
- Kazdin, A.E (1982), Single-Case Research designs, Oxford university Press, New york.

من قياس دقتها ، وأكثر من ذلك فهي تمكن الباحث من التحكم في هذه الدقة . وبدون استخدام المعاينة العشوائية، لا يضمن الباحث تحقيق أي شيء من ذلك، بل وتفقد البيانات شرعيتها ولا ثقة في نتائجها. كما أن الباحث وهو بصدد التحقق من صدق وثبات هذه البيانات التي تم جمعها فعليه الاستعانة بمقاييس الإرتباط، وعندما يبدأ الباحث في وصف بياناته عليه استخدام أساليب الوصف الإحصائي، وحين يسعى الباحث إلى التعميم فإن عليه استخدام أساليب التقدير Estimation وعندما يسعى الباحث اختبار فرض من الفروض فإن عليه الاستعانة بأساليب اختبارات الفروض الإحصائية، وعندما يسعى الباحث الوصول إلى القرار الأمثل أو إلى خطة مثلى عليه استخدام أساليب صنع القرارات .

ونكرر أن الأساليب الإحصائية والتي تم ذكر العديد منها خلال عرض وظائف الإحصاء – هي المنفذ للبحوث العلمية – أياً كان منهج البحث أو مدخله . كما أن هذه الأساليب لا بديل لها كما أن عدم إستخدامها يفقد البحث علميته ولا يمكن معرفة أو تقدير قيمة النتائج التي يتم التوصل إليها .

الباب الثاني

أساليب وصف متغير وحيد

التوزيع التكراري
العرض البياني
مقاييس النزعة المركزية
النسب والمعدلات
الأرقام القياسية
مقاييس الموضع
مقاييس التشتت
مقاييس الإلتواء
مقاييس التفرطح
مقاييس التركيز
مقاييس المركز النسبي
التوزيع الطبيعي



٢-١ التوزيع التكراري :

٢-١-١ الأهميـــة :

بعد أن ينتهي الباحث من عملية جمع البيانات، وأياً كان مستوى القياس المستخدم، فإن عليه أن يقوم بتنظيمها وترتيبها، إذ أن هذه البيانات التي تم جمعها – وتسمى بيانات خام – تكون في صورة غير معبرة ويصعب استنتاج معلومات منها. ويتم ترتيب هذه البيانات الخام في جدول يسمى التوزيع (أو الجدول) التكراري. وفي هذا الجدول يتم توزيع البيانات الخام إلى فئات (مجموعات) بأطوال مناسبة، ويدون التكرار (عدد الحالات) أمام الفئة المناظرة له .

تطبيـق ١ :

ولتوضيح ذلك نفرض أن الباحث قام بجمع البيانات التالية والتي تمثل درجات اختبار في مادة الرياضيات لخمسين طالباً كما هو موضح بالجدول رقم (١) .

جدول رقم (١)

٧٠	٥٥	٥١	٤٢	٥٧
٤٥	٦٠	٤٧	٦٣	٥٣
٣٣	٦٥	٣٩	٨٢	٥٥
٦٤	٥٨	٦١	٦٥	٤٢
٥٠	٥٢	٥٣	٤٥	٥٥
٢٥	٣٦	٥٩	٦٣	٣٩
٦٥	٤٥	٤٩	٥٤	٦٤
٧٥	٤٢	٤١	٥٢	٧٨
٣٠	٣٥	٢٥	٤٨	٢٦
٢٠	٤٠	٥٥	٤٦	٨٨

هذه البيانات الخام لا توضح الكثير عن طبيعة الظاهرة محل الدراسة، فكم عدد الطلاب الراسبين؟ كم عدد الطلاب الممتازين؟ وإذا كانت هذه الدرجات تمثل درجات طلاب أحد الفصول ونود معرفة مستوى هذا الفصل، هل هو ضعيف، متوسط، جيد، ممتاز؟ وإذا كنا نريد مقارنة هذا الفصل بفصل آخر فكيف تتم المقارنة؟ لا شك أن هذه البيانات بصورتها الخام أو الأولية لا تساعدنا بسهولة في الإجابة على كل هذه الاستفسارات وغيرها. ولذلك فإننا نقوم بتلخيص هذه البيانات وتنظيمها في صورة جدول تكراري (أو توزيع تكراري) كما هو موضح بالجدول رقم (٢) .

جدول رقم (٢)

الجدول التكراري

الفئات	العلامات	التكرار
٢٠ – ٣٠	////	٤
٣٠ – ٤٠	~~////~~ /	٦
٤٠ – ٥٠	~~////~~ ~~////~~ //	١٢
٥٠ – ٦٠	~~////~~ ~~////~~ ////	١٤
٦٠ – ٧٠	~~////~~ ////	٩
٧٠ – ٨٠	///	٣
٨٠ – ٩٠	//	٢
		٥٠

وفي هذا الجدول قمنا بتقسيم قيمة الظاهرة (الدرجات) إلى فئات، فالفئة الأولى وهي ٢٠–٣٠ خصصت للدرجات التي تقع بين ٢٠ درجة وتقل عن ٣٠ درجة والتكرار المناظر لهذه الفئة هو ٤ بمعنى أن هناك أربعة طلاب تقع درجاتهم في هذه الفئة. فبالرجوع إلى البيانات الخام بالجدول رقم (١) نجد أن هذه الأربع درجات هي : ٢٥، ٢٥، ٢٦، ٢٠

وبالمثل فإن الفئة الثانية ٣٠–٤٠ فإنها خصصت للدرجات التي تقع بين

٣٠ درجة وتقل عن ٤٠ . والتكرار المناظر لهذه الفئة هو ٦ بمعنى أن هناك ستة طلاب حصلوا على درجات تقع في الفئة ٣٠-٤٠ وبالرجوع إلى الجدول رقم (١) نجد أن هذه الدرجات هي ٣٣، ٣٩، ٣٦، ٣٩، ٣٠، ٣٥

وهكذا بالنسبة للفئات الأخرى. لاحظ أن مجموع التكرار ٥٠ وهو عدد المشاهدات (الدرجات) ولسهولة إعداد الجدول التكراري، جدول (٢) فإننا نقوم أولًا بكتابة الفئات في الخانة المخصصة لذلك (الخانة الأولى) ونقوم بعمل خانة أخرى وسيطة تخصص لعلامات، حيث نضع علامة (/) لكل درجة أمام الفئة المناظرة لها وأخيراً نقوم بعد العلامات المدونة أمام كل فئة لتمثل التكرار المناظر للفئة. ولسهولة عد العلامات فإننا نضع كل خمس علامات في صورة حزمة وذلك بوضع العلامة الخامسة بصورة مختلفة كما هو موضح بالجدول .

والجدول التكراري هو بيان بقيم المتغير مقسمة إلى فئات أو مجموعات مع بيان التكرار بكل فئة. ويمكن عرض أهميته فيما يلي :

(١) تلخيص البيانات، حيث يتم عرض البيانات في جدول صغير لا يتعدى صفحة واحدة أو أقل من ذلك - مهما كان عدد البيانات التي يتم جمعها حتى لو وصل إلى مئات الآلاف .

(٢) هذا التلخيص يؤدي إلى إفصاح عن المعلومات بصورة مباشرة وسريعة. ويساعد على ذلك أيضا ترتيب هذه البيانات. ذلك الإفصاح لا يكون ممكناً بالنظر إلى أعداد كبيرة من القيم متناثرة ومتباعدة وغير مرتبة .

(٣) إمكان المقارنة بين مجموعتين أو أكثر بعرضها في جدول واحد .

(٤) يمكن حساب كافة المقاييس الإحصائية من هذا الجدول المختصر، بدلًا من الرجوع للبيانات الأصلية الكبيرة العدد. وفي ذلك تسهيل كبير لحساب هذه المقاييس .

(٥) هناك مقاييس إحصائية يلزم حسابها أن توضع البيانات في جدول تكراري .

(٦) إمكان عرض الظاهرة محل البحث عرضاً بيانياً .

المثال السابق يعطي فكرة عن مفهوم وطبيعة الجدول التكراري (التوزيع التكراري). ونعرض فيما يلي الخطوات اللازمة لتكوين الجدول التكراري، وذلك بعد تقديم بعض التعاريف الضرورية :

□ **حدود الفئـــة :**

لكل فئة حدان، الحد الأدنى والحد الأعلى، فالفئة الأولى ٢٠-٣٠ حدها الأدنى هو ٢٠ وحدها الأعلى هو ٣٠، والفئة الثانية حدها الأدنى ٣٠ وحدها الأعلى ٤٠ وهكذا .

□ **طـول الفئـة :**

هو الفرق بين الحد الأعلى والحد الأدنى للفئة، أي أن :

طول الفئة = الحد الأعلى - الحد الأدنى

فمثلًا طول الفئة الأولى = ٣٠-٢٠=١٠

طول الفئة الثانية = ٤٠-٣٠=١٠

ويلاحظ في هذا المثال أن طول الفئة موحد وهو ١٠ لكل الفئات. وفي هذه الحالة، أي حالة تساوي أطوال الفئات يسمى الجدول التكراري (أو التوزيع التكراري) بأنه ذو فئات منتظمة .

□ **مركـز الفئـة :**

لكل فئة مركز، هو القيمة التي تقع في منتصف الفئة، ويتم تحديدها كما يلي :

مركز الفئة = $\frac{1}{2}$ (الحد الأدنى + الحد الأعلى) .

فمثلًا مركز الفئة الأولى = $\frac{1}{2}$ (٢٠+٣٠) = $\frac{1}{2}$ (٥٠) = ٢٥

مركز الفئة الثانية = $\frac{1}{2}$ (٣٠+٤٠) = $\frac{1}{2}$ (٧٠) = ٣٥

وهكـــذا .

وتأتي أهمية مركز الفئة في أننا نفترض دائماً أن جميع المشاهدات التي تقع في فئة ما وكأن قيمتها تساوي مركز الفئة. فمثلاً الفئة الأولى ٢٠–٣٠ مركزها ٢٥ ويفترض أن جميع الطلاب الذين وقعوا في الفئة الأولى (تكرارات الفئة الأولى) وعددهم ٤ وكأن كل منهم قد حصل على ٢٥ درجة. وهذا نوع من التقريب على أي حال لسهولة إجراء التحليلات الإحصائية. وحتى يمكن إستخدام الجدول التكراري مباشرة في إجراء هذه التحليلات دون الرجوع إلى البيانات الخام .

٢-١-٢ خطوات تكوين الجدول التكراري :

١ – تحديد عدد الفئات .

٢ – تحديد طول الفئة .

٣ – تحديد عدد التكرارات في كل فئة .

١ – تحديد عدد الفئات :

يتم تحديد عدد الفئات في ضوء الإعتبارين التاليين :

(أ) أن تكون قيم المشاهدات التي تخصص لفئة معينة قريبة بقدر الإمكان من مركز تلك الفئة وذلك حتى نقلل من الخطأ الناتج من عملية التبويب. فقد سبق أن ذكرنا أنه يفترض دائماً أن قيم المشاهدات التي تقع في فئة معينة تكون مساوية لمركز هذه الفئة .

(ب) أن يكون عدد الفئات قليلاً بقدر الإمكان لتحقيق عملية تلخيص البيانات ولسهولة إجراء التحليلات الإحصائية .

وعموماً فإن عدد الفئات يعتمد على عدد المشاهدات أو التكرار الكلي. ويمكن الاسترشاد بقاعدة ستورج (Sturge's rule) لتحديد عدد الفئات (م) .

م = ١+٣,٣ لو ن (٢-١)

حيث لو ترمز إلى اللوغاريتم المعتاد للأساس ١٠، ن ترمز إلى عدد

المشاهدات وبالنسبة للقاريء الذي ليس لديه **الإلمام** باللوغاريتمات فيمكنه الاسترشاد بالجدول التالي وهو تطبيق لقاعدة ستورج (مع التقريب لأقرب رقم صحيح) :

عدد المشاهدات	٣٠	٥٠	١٠٠	٢٠٠	٥٠٠	١٠٠٠	٢٠٠٠	٥٠٠٠	١٠٠٠٠	٢٠٠٠٠	٣٠٠٠٠	٥٠٠٠٠	١٠٠٠٠٠
عدد الفئات	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨

فإذا كان عدد المشاهدات ١٠٠ مثلًا فإن عدد الفئات يكون ٨ .

ويلاحظ من الجدول أنه إذا ما زاد عدد المشاهدات بدرجة كبيرة فإن الزيادة في عدد الفئات تكون طفيفة، ونادراً ما يستخدم عدد من الفئات يزيد على ٢٠ .

لاحظ أن عدد المشاهدات في مثالنا السابق هو ٥٠ ولذلك فإن عدد الفئات المناسب هو ٧ .

٢ – تحديد طول الفئــة :

يتم تحديد طول الفئة بقسمة المدى العام لقيم المشاهدات، وهو الفرق بين أكبر قيمة وأصغر قيمة، على عدد الفئات والذي تم تحديده في الخطوة (١). أي أن :

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المـدى العـام}}{\text{عـدد الفئـات}}$$

وبالتطبيق على مثالنا السابق ،

$$\text{طول الفئــة} = \frac{٨٨ - ٢٠}{٧} = \frac{٦٨}{٧} = ٩,٧$$

وبالتقريب يكون طول الفئة ١٠ .

٣ – تحديد عدد التكرارات في كل فئة :

نبدأ بقراءة المشاهدات بالتسلسل، ثم نضع علامة أمام الفئة المناظرة لكل مشاهدة، ففي مثالنا السابق نبدأ بالرقم ٧٠، هذا الرقم يقع في الفئة ٧٠–٨٠ فنضع علامة (/) أمام الفئة. ويلي ذلك الرقم ٥٥ ويقع في الفئة ٥٠–٦٠ فنضع علامة

أمام هذه الفئة، ثم الرقم ٥١ وهكذا حتى الرقم ٨٨ . وبعد ذلك نبدأ في عد العلامات أمام كل فئة ويكون عدد العلامات هذا هو التكرار الحادث بالنسبة للفئة .

٢-١-٣ طرق كتابة الفئات في الجدول التكراري :

(أ) يلاحظ في الجدول التكراري رقم (٢) أن الفئات كتبت على الصورة ٢٠-٣٠، ٣٠-٤٠، ٤٠-٥٠ وهكذا. ويعاب على هذه الطريقة أنها قد تؤدي إلى تداخل الفئات. فالرقم ٣٠ مثلًا هل يتبع الفئة الأولى أم الفئة الثانية ؟ ولذا يرى البعض أنه من الأفضل كتابة الفئات على الصورة :

٢٠ إلى أقل من ٣٠

٣٠ إلى أقل من ٤٠

وهكـــذا .

وبذلك لا يكون هناك تداخلًا بين الفئات. ويلاحظ أن هذا ما اتبعناه عند إعداد الجدول التكراري رقم (٢). وعليه فإنه للاختصار فإن الفئات سيتم كتابتها على الصورة ٢٠- ٣٠-، ٣٠-٤٠، وهكذا على أن يكون مفهوماً أن الفئة الأولى مثلًا وهي ٢٠-٣٠ تعني أنها تشمل المشاهدات من ٢٠ إلى أقل من ٣٠ .

(ب) وهناك طريقة أخرى للتعبير عن ذلك بكتابة الفئات كما يلي :

٢٠-، ٣٠-، ٤٠-، .... ، ٨٠-٩٠

(جـ) وهناك طريقة أخرى تشابه ما سبق ولكن تكون فيها الفئات على الصورة :

أكثر من ٢٠-٣٠

أكثر من ٣٠-٤٠

وهكـــذا .

(د) في حالة إعداد توزيع تكراري لمتغير غير مستمر، ويأخذ عدد قليل من

القيم، مثال ذلك عدد الأولاد في الأسرة فإن الفئات يفضل أن تكون على الصورة التالية :

١، ٢، ٣، ....

أي أن كل قيمة تمثل بفئة – ولا داعي لإجراء الدمج طالما أن عدد القيم قليل .

على أن هناك حالات كثيرة يأخذ فيها المتغير غير المستمر قيماً كثيرة لا نستطيع معها تخصيص فئة لكل قيمة، مثال ذلك عدد حوادث السيارات في اليوم، عدد الطلبة بالفصل، في مثل هذه الحالات نقوم بتجميع القيم في فئات ونتعامل مع المتغير كما لو كان متغير مستمر ونستخدم الطرق السابق عرضها .

(هـ) وهناك طريقة أخرى تختلف عن ذلك، حيث يتم تدوين الفئات كما يلي :
٢٠- ٢٩، ٣٠-٣٩، ٤٠-٤٩، ....

ولكن يعاب على هذه الطريقة أنها تخلق فجوات بين الفئات. فأين تقع الدرجة ٢٩,٥ وهذا أمر محتمل حدوثه. وإن كانت المشاهدات في الجدول (١) لا تتضمن الدرجة ٢٩,٥ فإن ذلك قد يكون راجعاً إلى حدوث شيء من التقريب بغرض كتابة الدرجات في صورة أعداد صحيحة لا تتضمن كسوراً عشرية. ولذا فإن الحدود المبينة بهذه الطريقة لا تمثل الحدود الحقيقية للفئات. ويصبح من اللازم البحث عن هذه الحدود الحقيقية قبل إجراء التحليل الإحصائي – وحتى لا يكون هناك فجوات بين الفئات. وفي مثالنا هذا فإن الحدود الحقيقية للفئات تكون على الصورة :

١٩,٥ – ٢٩,٥

٢٩,٥ – ٣٩,٥

٣٩,٥ – ٤٩,٥

وهكـــذا .

٢-١-٤ الفئات غير المنتظمة :

بصفة عامة يفضل عند إعداد الجدول التكراري أن تكون الفئات منتظمة، بمعنى أن تكون أطوال الفئات متساوية، إذ أن ذلك سيوفر الكثير من عبء العمل اللازم عند إجراء التحليلات الإحصائية، كما سيتضح ذلك فيما بعد. ومع ذلك فإن هناك بعض الظواهر يصبح معها استخدام الفئات غير المنتظمة أكثر ملاءمة لعرض الظاهرة. مثال ذلك عند دراسة ظاهرة أعمار حالات الوفيات من الأطفال الأقل من سنة. حيث يكون عدد الوفيات في اللحظات الأولى من الولادة كبيراً، ثم يقل هذا العدد تدريجياً بزيادة عمر الطفل. وحتى يكون الجدول التكراري معبراً عن حقيقة هذه الظاهرة، فإنه يفضل تخصيص الفئة الأولى لحالات الوفيات الذين تتراوح أعمارهم بين صفر ويوم واحد والفئة الثانية من يوم إلى يومين، ولا يكون من الملائم على أي حال جعل طول الفئة يوم واحد بطريقة منتظمة، إذ بذلك يصبح عدد الفئات بقدر عدد أيام السنة. ولذا فإن طول الفئة يزاد تدريجياً ليصبح عدد الفئات ملائماً. وكذلك فإنه من دواعي استخدام فئات غير منتظمة، وجود عدد قليل من القيم المتطرفة، كما قد نشاهد في توزيع درجات الطلاب، وتوزيع الأجور، الدخول .

الفئــات المفتــوحة :

هي الفئات التي يكون أحد حديها الأعلى أو الأدنى غير محدد. وقد نضطر أحياناً إلى استخدامها في حالة وجود عدد قليل من المشاهدات قيمها متباعدة في أعلى التوزيع أو في أسفله، وقد نضطر إلى استخدام الفئات المفتوحة أيضاً لعدم إمكان تحديد أحد حدي الفئة. والمثال التالي يوضح حالة الفئات المفتوحة. وهو يمثل أعمار حاملي رخص القيادة .

العمـــر
أقل من ٢٠
٢٠-٣٠
٣٠-٤٠

٢-١-٥ التوزيع التكراري المتجمع الصاعد :

في هذا التوزيع يتم تجميع التكرارات على التوالي. فأحياناً يكون المطلوب تحديد عدد التكرارات الأقل من قيمة معينة. ويتضح ذلك من الجدول التالي تطبيقاً للبيانات الواردة بالجدول (٢) .

جدول رقم (٣)
التكرار المتجمع الصاعد

	التكـــرار الصــاعـد
أقل من ٢٠	صفــر
أقل من ٣٠	٤
أقل من ٤٠	١٠
أقل من ٥٠	٢٢
أقل من ٦٠	٣٦
أقل من ٧٠	٤٥
أقل من ٨٠	٤٨
أقل من ٩٠	٥٠

٢-١-٦ التوزيع التكراري المتجمع النازل :

وهو يوضح عدد التكرارات الأكثر من قيمة معينة. وتطبيقاً للبيانات الواردة بالجدول رقم (٢) يمكن تصور الجدول التكراري المتجمع النازل كما يلي :

جدول رقم (٤)

التكرار المتجمع النازل

	التكرار النازل
من ٢٠ فأكثر	٥٠
من ٣٠ فأكثر	٤٦
من ٤٠ فأكثر	٤٠
من ٥٠ فأكثر	٢٨
من ٦٠ فأكثر	١٤
من ٧٠ فأكثر	٥
من ٨٠ فأكثر	٢
من ٩٠ فأكثر	صفر

٢-١-٧ التوزيع التكراري النسبي :

ونحصل عليه بقسمة التكرارات على مجموع التكرارات أي (ن). وكما ذكرنا فإن استخدام النسب يؤدي إلى مزيد من الوضوح خاصة لأغراض المقارنات في حالة اختلاف التكرار الكلي. ويمكن عرضها أيضاً كنسبة مئوية. والجدول التالي يوضح التكرار النسبي للتوزيع الأصلي وللتوزيع المتجمع الصاعد في مثالنا الخاص بدرجات الطلاب .

التوزيع التكراري النسبي

	التكرار الأصلي	التكرار الصاعد
٢٠ ـ ٣٠	٠,٠٨	٠,٠٨
٣٠ ـ ٤٠	٠,١٢	٠,٢٠
٤٠ ـ ٥٠	٠,٢٤	٠,٤٤
٥٠ ـ ٦٠	٠,٢٨	٠,٧٢
٦٠ ـ ٧٠	٠,١٨	٠,٩٠
٧٠ ـ ٨٠	٠,٠٦	٠,٩٦
٨٠ ـ ٩٠	٠,٠٤	١,٠٠
	١,٠	

□ **مثال ٢ :**

لأغراض المقارنة بين الحالة التعليمية للسكان في مجتمعين تم تحويل التوزيع التكراري (الجدول على اليمين) إلى توزيع تكراري نسبي (على اليسار).

الحالة التعليمية (ألف)

	المجتمع (أ)	المجتمع (ب)
أمي	١٣٧٧	٢٥٠٢
يقرأ ويكتب	١١٠١	٢٣٨١
إبتدائية	١٠٠٩	٢٢٦١
إعدادية	٥٥٠	٢١٤١
ثانوية	٤٥٩	٢٠٨٣
جامعية	٦٩	٤١٧
شهادات عليا	٢٣	١١٩
	٤٥٨٩	١١٩٠٤

التوزيع التكراري النسبي

(أ)	(ب)
٠,٣٠٠	٠,٢١٠
٠,٢٤٠	٠,٢٠٠
٠,٢٢٠	٠,١٩٠
٠,١٢٠	٠,١٨٠
٠,١٠٠	٠,١٧٥
٠,٠١٥٢	٠,٠٣٥
٠,٠٠٥	٠,٠١٠
١	١

تمارين الفصل ٢ - ١

٣ ـ البيان التالي يمثل عدد الكتب المستعارة في اليوم من إحدى المكتبات العامة خلال شهر. والمطلوب إعداد توزيع تكراري لعدد الكتب المستعارة في اليوم على أساس خمس فئات منتظمة ـ مع بيان التوزيع التكراري المتجمع الصاعد.

٨٧	١٠٨	٩٣	٢٨	٧٠	٤٠
٦٩	٧١	١٥	٥٢	٢٦	٦٣
٨٣	٥٧	٤٥	٧٣	١٠	٦١
٦٧	٧٨	٩٥	١٠٠	١٠٦	٤٨
٨٠	٤٠	١٠٥	٧٥	٦٥	٣٠

□ الحل:

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{١٠٨ - ١٠}{٥} = \frac{٩٨}{٥} = ٢٠ \text{ تقريباً}$$

وبتوسيط العلامات يمكن إعداد التوزيع التكراري كما هو موضح فيما يلي:

عدد الكتب	التكرار	التوزيع الصاعد
١٠ ـ ٣٠	٤	٤
٣٠ ـ ٥٠	٥	٩
٥٠ ـ ٧٠	٧	١٦
٧٠ ـ ٩٠	٨	٢٤
٩٠ ـ ١١٠	٦	٣٠

٤ – الآتي بيان بعدد حوادث السيارات في اليوم في إحدى المدن والمطلوب إعداد توزيع تكراري يكون فيه طول الفئة يساوي خمسة.

٥　　١٠　　٢٦　　٢٧　　٢٢　　١٦
١٢　　٢١　　٢٠　　٢٢　　٦　　٢٧
١٠　　١٧　　٢٢　　٢٨　　١٦　　١٧
٢١　　٩　　٢١　　١٨　　٢٩　　٢٤
١٣　　١٨　　١٤　　٢٦　　٣٤　　٣٣

□ الحل:

الفئات	٥ – ١٠	١٠ – ١٥	١٥ – ٢٠	٢٠ – ٢٥	٢٥ – ٣٠	٣٠ – ٣٥
التكرار	٣	٥	٦	٨	٦	٢

٥ – باستخدام البيانات الواردة بالتمرين رقم (٢) – المطلوب إعداد التوزيع النسبي وذلك للتكرار الأصلي وكذا للتكرار المتجمع الصاعد.

٦ – البيان التالي يمثل عدد سنوات الخدمة لثلاثين عاملاً بإحدى الشركات، والمطلوب إعداد توزيع تكراري على أساس خمسة فئات منتظمة.

٨　　٦　　٢　　٨　　٦　　٣
٤　　١١　　٦　　٤　　٥　　٩
٢　　٤　　٨　　١١　　٧　　٥
١١　　٦　　٩　　٥　　١٠　　٥
٢　　٣　　٦　　٧　　٣　　٧

□ الحل:

الفئات	٢ – ٤	٤ – ٦	٦ – ٨	٨ – ١٠	١٠ – ١٢
التكرار	٦	٧	٨	٥	٤

□ □ □

٧ – في دراسة لتقييم إحدى المكتبات، تم سحب عينة من المجموعة المكتبية، وسجل عدد النسخ لكل كتاب كما هو موضح أدناه. والمطلوب إعداد توزيع تكراري لعدد النسخ .

٦	١٠	١	٢	٧	٢	١٤	١١
١	١	٢	١٨	٢	٥	١	٣
٨	١	٤	٣	٩	٣	٦	٨
٣	١٥	٣	٥	١	١٢	٢	١

الحـــل :

عدد الفئات المناسب حسب قاعدة ستورج هو ستة .

طول الفئة = $\frac{١٨ - ١}{٦} = \frac{١٧}{٦} = ٢,٨٣ \approx ٣$

عـدد النسـخ	١-٤	٤-٧	٧-١٠	١٠-١٣	١٣-١٦	١٦-١٩
التـكـــرار	١٧	٥	٤	٣	٢	١

٢ – ٢

العرض البياني

Graphical Presentation

الأهميـــة
العرض البياني للتغيرات الإسمية
العرض لبياني للتغيرات الترتيبية
العرض البياني للتغيرات الكمية

٢ - ٢
العـرض البياني
Graphical Presentation

٢-٢-١ الأهميـــة :

ان تلخيص وتنظيم البيانات في صورة جداول تكرارية يعطي تصوراً في سبيل وصف طبيعة التوزيع التكراري. والعرض البياني يُعد وسيلة أخرى مساعدة في هذا الصدد .

ويمكن عرض أهمية العرض البياني فيما يلي :

(١) الإفصاح عن خصائص الظاهرة بصورة سريعة وأحياناً بمجرد النظر وبدون الدخول في الأرقام وتفصيلاتها .

(٢) إمكان إجراء المقارنات بين التوزيعات المختلفة .

(٣) إستخلاص بعض المؤشرات الإحصائية عن التوزيع بسرعة ودون استخدام الصيغ الرياضية .

(٤) يُعد العرض البياني تمهيداً أساسياً لتوفيق صيغة رياضية لوصف التوزيع التكراري .

وتختلف أساليب العرض البياني تبعاً لمستوى قياس المتغيرات، أي ما إذا كانت كمية أو كيفية (إسمية - ترتيبية) وفيما يلي عرض لهذه الأساليب :

٢-٢-١ العرض البياني للمتغيرات الإسمية :

لعرض المتغيرات الإسمية بيانياً، تستخدم الأشكال التالية :

(١) الأعمدة البيانية bar chart .

يخصص عمود (رأسي غالباً) لكل فئة بحيث يتناسب إرتفاع العمود مع التكرار بالفئة. وإذا ما اتخذنا وحدة القياس لتعبر عن عرض كل عمود فإن مساحة كل عمود يمكن استخدامها لتعبر عن تكرار الفئة، وتكون المساحة الكلية

للأعمدة ممثلة للتكرار الكلي. ويلاحظ أنه طالما أن المتغير إسمي فإن الترتيب لا يكون له معنى، كما أن الأعمدة لا تكون متلاصقة تمشياً مع كون المتغير غير مستمر .

(٢) الدائرة البيانية Pie (circle) chart :

تقسم مساحة الدائرة على الفئات بحيث تتناسب المساحة مع التكرار، ويتم ذلك بتقسيم عدد الدرجات في الدائرة وقدرها ٣٦٠ إلى عدد من الزوايا بحيث تتناسب درجات الزاوية مع التكرار بالفئة. وتستخدم الصيغة التالية :

زاوية الفئة = ٣٦٠ × التكرار النسبي للفئة .

$$ز = ٣٦٠ \times \frac{ك}{ن} \qquad (٢ - ٢)$$

تطبيـــق :

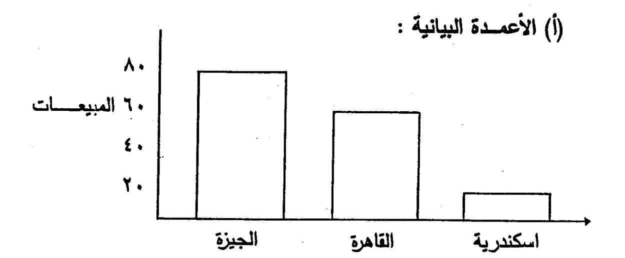
البيان التالي يوضح كمية المبيعات في مناطق التسويق المختلفة لإحدى الشركات والمطلوب إعداد العرض البياني لها باستخدام :

(أ) الأعمدة البيانية

(ب) الدائرة البيانية

المنطقــــــــة	كميــــة المبيعــــــات
القاهــــــــــرة	٨٠
الجيــــــــــزة	٦٠
الإسكنــــــــدرية	٢٠

(أ) الأعمـدة البيانية :



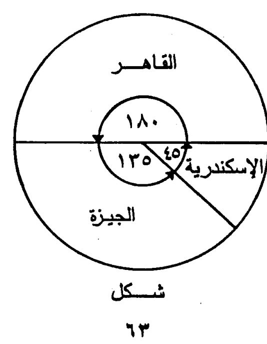
(ب) الدائرة البيانية :

نحدد مقدار الزاوية لكل منطقة :

القاهرة = ٣٦٠ × $\frac{٨٠}{١٦٠}$ = ١٨٠

الجيزة = ٣٦٠ × $\frac{٦٠}{١٦٠}$ = ١٣٥

الاسكندرية = ٣٦٠ × $\frac{٢٠}{١٦٠}$ = ٤٥



شـــكل

٢-٢-٣ العرض البياني للمتغيرات الترتيبية :

لهذا الغرض تستخدم نفس الأشكال التي سبق ذكرها في حالة المتغيرات الإسمية، وبنفس القواعد، على أنه يمكن هنا إستغلال المعلومات الإضافية باعتبار أن المتغيرات ترتيبية – إذ يفضل ترتيب المتغير ترتيباً تصاعدياً سواء كان ذلك عند رسم الأعمدة البيانية أو في حالة الدائرة البيانية، وفي الحالة الأخيرة يمكن اعتبار نقطة البداية محور السينات .

تطبيق ٢ :

التوزيع التكراري التالي يعرض أرصدة المدينين في إحدى الشركات (ألف دولار) .

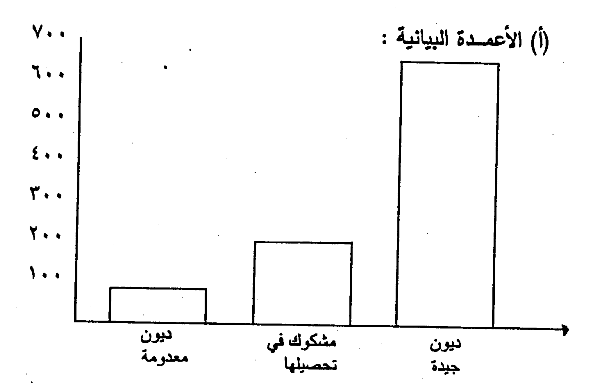
الديـــــون	المبـــلـــغ
معـــدومـــة	٥٠
مشكوك في تحصيلهـا	٢٠٠
جيـــدة	٦٥٠

والمطلوب إعداد عرض بياني لهذه البيانات باستخدام :

(أ) الأعمدة البيانية .

(ب) الدائرة البيانية .

(أ) الأعمـدة البيانية :

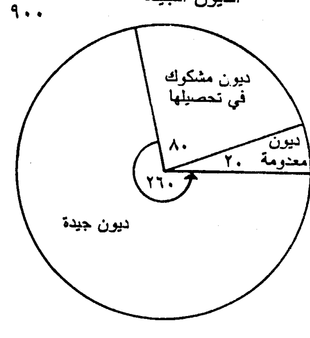


(ب) نحدد مقدار الزاوية لكل فئـة :

الديون المعدومة = $\frac{٥٠}{٩٠٠} \times ٣٦٠ = ٢٠$

الديون المشكوك في تحصيلها = $\frac{٢٠٠}{٩٠٠} \times ٣٦٠ = ٨٠$

الديون الجيدة = $\frac{٦٥٠}{٩٠٠} \times ٣٦٠ = ٢٦٠$



٢-٤-٤ العرض البياني للمتغيرات الكمية :

فيما يلي طرق عرض المتغيرات الكمية :

١ – المدرج التكراري .

٢ – المضلع التكراري .

٣ – المنحنى التكراري .

٤ – المضلع التكراري المتجمع (الصاعد – النازل) .

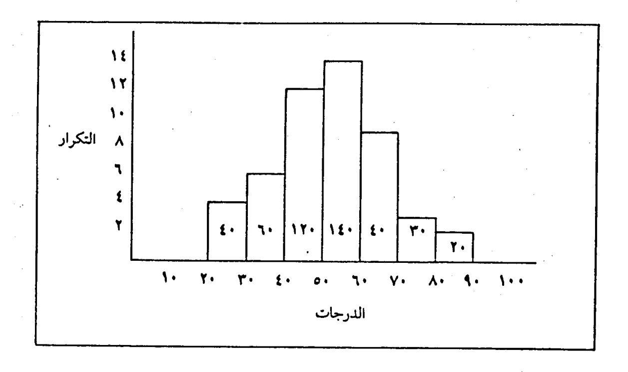
٥ – المنحنى التكراري المتجمع (الصاعد – النازل) .

١ – المدرج التكراري :

المدرج التكراري عبارة عن مستطيلات متجاورة – يخصص كل مستطيل منها لإحدى الفئات ، بحيث تتناسب مساحة المستطيلات مع تكرارات الفئات . ويتضح ذلك من الشكل التالي، حيث يعرض التوزيع التكراري الموضح بالجدول رقم (٢). ويلاحظ أن المحـوز الأفقي يخصص للفئات والمحـور الرأسي للتكرارات .

□ **مثال ٣ :**

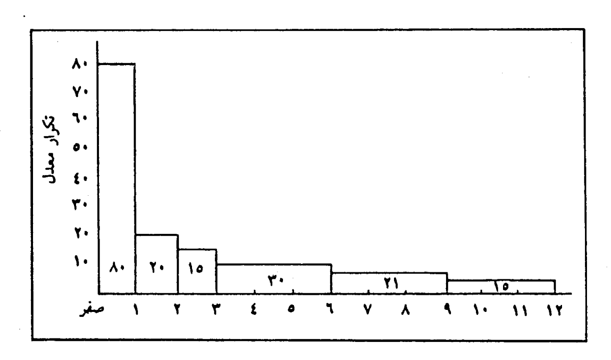
إرسم المدرج التكراري للتوزيع التكراري الموضح بالجدول رقم (٢)



لاحظ أن التكرارات تتناسب مع مساحات المستطيلات وهي الموضحة داخل المستطيلات، حيث أن الفئات بالجدول التكراري منتظمة ـ فأذا ما كانت الفئات غير منتظمة فإنه لا يصح استخدام التكرارات الأصلية كارتفاعات للمستطيلات، ويستخدم بدلاً منها التكرارات المعدلة والتي يتم الحصول عليها بقسمة التكرار الأصلي بكل فئة على طول الفئة المناظرة، ويمكن توضيح ذلك عند رسم المدرج التكراري للتوزيع التكراري التالي والذي يمثل أعمار الوفيات من الأطفال الأقل من سنة في إحدى الدول عام (١٩١٧). في الخانة الثالثة، تم حساب طول كل فئة وفي الخانة الرابعة تم حساب التكرار المعدل وذلك بقسمة التكرار بكل فئة على طول الفئة المناظرة.

جدول رقم (٥)

العمر بالشهر	التكرار (ألف)	طول الفئة	التكرار المعدل
صفر ــ ١	٨٠	١	٨٠
١ ــ ٢	٢٠	١	٢٠
٢ ــ ٣	١٥	١	١٥
٣ ــ ٦	٣٠	٣	١٠
٦ ــ ٩	٢١	٣	٧
٩ ــ ١٢	١٥	٣	٥
	١٨١		



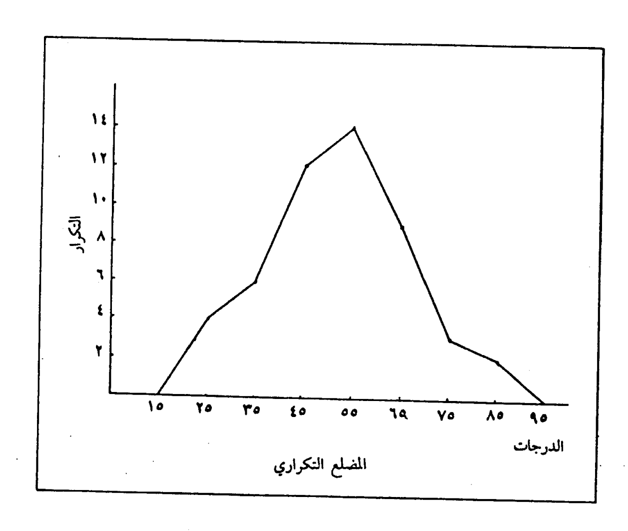
ويلاحظ أنه باستخدام التكرارات المعدلة كارتفاعات للمستطيلات فإن مساحة المستطيلات تتناسب مع التكرارات.

٢ ــ المضلع التكراري:

وهو وسيلة أخرى لعرض التوزيع التكراري، ويمتاز عن المدرج التكراري في أنه يمكننا من المقارنة بين أكثر من توزيع تكراري، وذلك برسمها في شكل

واحد. ويتم رسم المضلع التكراري بحيث يخصص المحور الأفقي لمراكز الفئات والمحور الرأسي للتكرارات، ثم نضع نقطة فوق مركز كل فئة وبارتفاع يناظر التكرار المقابل للفئة. ويراعى عند رسم المضلع التكراري توصيل النقاط المذكورة بخطوط مستقيمة ومده ليلامس المحور الأفقي من الطرفين، وذلك بافتراض فئتين وهميتين تكرار كل منهما صفراً.

هذا ويمكن رسم المضلع التكراري مع المدرج التكراري في شكل واحد، وذلك بوضع النقاط عند منتصف القواعد العلوية للمستطيلات. ويلاحظ أن مساحة المدرج التكراري تساوي تماماً المساحة تحت المضلع التكراري في حالة ما إذا كانت الفئات منتظمة. والشكل التالي يوضح المضلع التكراري للتوزيع التكراري الوارد بالجدول رقم (٢).



المضلع التكراري

٣ – المنحنى التكراري :

فكرته مشابهة للمضلع التكراري ، ويتم رسمه بنفس الطريقة ، غير أن النقاط يتم توصيلها باليد ، بحيث نحصل على منحنى ممهد لاتوجد به إنكسارات أو تغيرات فجائية كما في حالة المضلع التكراري . وعند رسم المنحنى التكراري يلاحظ أنه ليس من الضروري أن يمر على جميع النقاط .

أنواع المنحيات التكرارية :

يختلف شكل المنحنى التكراري باختلاف البيانات ، ولأغراض الدراسة العلمية ، يتم تصنيف المنحنيات تبعاً لعدة عوامل نعرض أكثرها شيوعاً .

(أ) الإلتـــواء :

وتبعاً لهذه الخاصية يتم تقسيم المنحنيات إلى منحنيات ملتوية ومنحنيات متماثلة ، وقد تم تفصيل ذلك في الفصل ٢ – ٨ .

(ب) التفـرطـــح :

وتبعاً لهذه الخاصية يتم تقسيم المنحنيات إلى مفرطحة ومدببة ، وقد تم تفصيل ذلك في الفصل ٢ – ٩ .

(جـ) الصيغة الرياضية :

ومن هذه الناحية يتم تقسيم المنحنيات التكرارية إلى مجموعات أهمها التوزيع

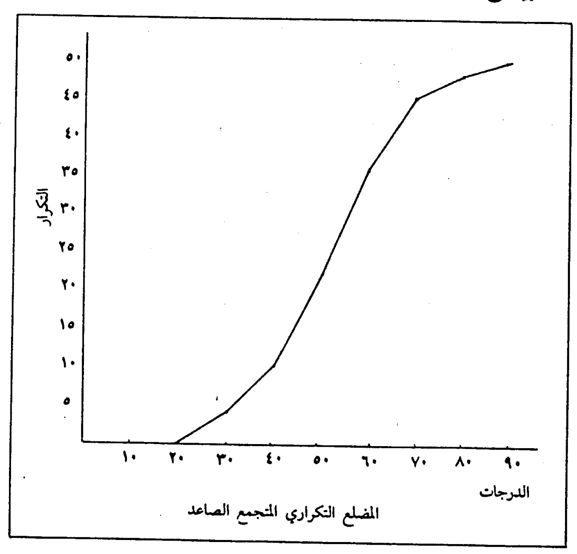
الطبيعي Normal distribution وتوزيع ت T - dist. وتوزيع ف F - dist. وتوزيع كا٢ Chi - square dist. .

وقد تم تخصيص الفصل ٢ – ١٢ لعرض تفصيلي عن التوزيع الطبيعي نظراً لشيوعه وتطبيقاته الهامة .

٤ – المضلع التكراري المتجمع :

يستخدم المضلع التكراري المتجمع الصاعد (النازل) لتمثيل التكرار المتجمع الصاعد (النازل) بيانياً . ويوضح الشكل التالي المضلع التكراري المتجمع الصاعد للبيانات الواردة بالجدول رقم (٣) :

تطبيـــق ٤ :



المضلع التكراري المتجمع الصاعد

ومن هذا الشكل يمكن بسهولة الحصول على عدد الطلاب الحاصلين على درجات أقل من درجة معينة (تحدد على المحور الأفقي)، وذلك بالنظر إلى التكرار المناظر على المحور الرأسي.

٥ ـ المنحنى التكراري المتجمع:

يتم رسم المنحنى التكراري المتجمع الصاعد (النازل) بنفس طريقة رسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد (النازل)، بخلاف أن النقاط يتم توصيلها باليد وليس بخطوط مستقيمة، وبهذا نحصل على منحنى ممهد لا توجد به تغيرات فجائية.

□ **ملاحظات عامة في العرض البياني:**

١ ـ المحور الرأسي يبدأ من الصفر. أما في المحور الأفقي فذلك ليس ضرورياً.

٢ ـ هناك اتفاق بين الإحصائيين على أن تكون نسبة ارتفاع المحور الرأسي إلى المحور الأفقي $\frac{3}{4}$ تقريباً.

٣ ـ عند رسم المضلع (أو المنحنى) التكراري المتجمع الصاعد، يفضل أن يصنع في المتوسط زاوية قدرها من ٤٠° إلى ٥٠° مع المحور الأفقي.

٥ ـ البيان التالي يوضح أعمار المستخدمين بإحدى الشركات:

٣٠	٣٧	٣٩	٣٦	٢٥	٣٥	٢٦	٣٤	٢٧	٣٥
٢٦	٤٤	٢٥	٤٥	٤١	٣٧	٣٩	٤٦	٣٢	٤٠
٣٥	٣٩	٣٠	٣٧	٥٧	٤٢	٥٣	٣٦	٤٤	٣٢
٥١	٣٤	٣٢	٤٩	٢٨	٥٤	٣٣	٤٨	٢٨	٤٧
٢٩	٤٣	٣٧	٥٨	٣١	٤٣	٣٦	٣٨	٣٠	٣٥

والمطلوب:

١ ـ توزيع الأعمار في جدول تكراري.

٢ ـ رسم المدرج التكراري والمضلع التكراري في شكل واحد.

٣ ـ رسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد.

□ الحل:

١ ـ الجدول التكراري:

(أ) حيث أن عدد المشاهدات ٥٠ فإن عدد الفئات المناسب هو ٧ وذلك بالاسترشاد بقاعدة ستورج.

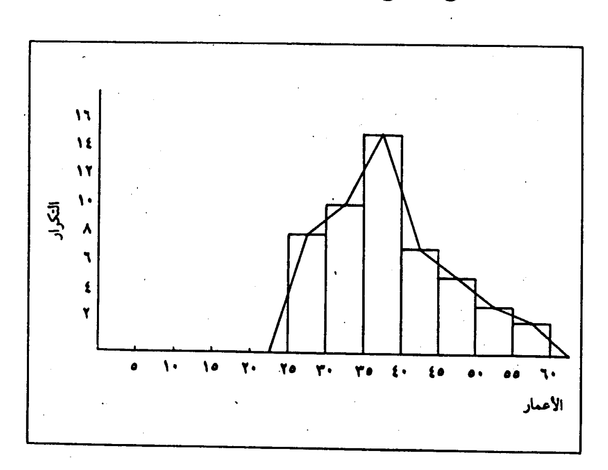
(ب) طول الفئة = $\frac{\text{المدى الكلي}}{\text{عدد الفئات}}$

= $\frac{٥٨ - ٢٥}{٧}$ = $\frac{٣٣}{٧}$ = ٥ مع التقريب لأقرب رقم صحيح.

جدول رقم (٦)
التوزيع التكراري لأعمار المستخدمين

الفئات	العلامات	التكرار
٢٥ ـ ٣٠	𝍸 |||	٨
٣٠ ـ ٣٥	𝍸 𝍸	١٠
٣٥ ـ ٤٠	𝍸 𝍸 𝍸	١٥
٤٠ ـ ٤٥	𝍸 ||	٧
٤٥ ـ ٥٠	𝍸	٥
٥٠ ـ ٥٥	|||	٣
٥٥ ـ ٦٠	||	٢
		٥٠

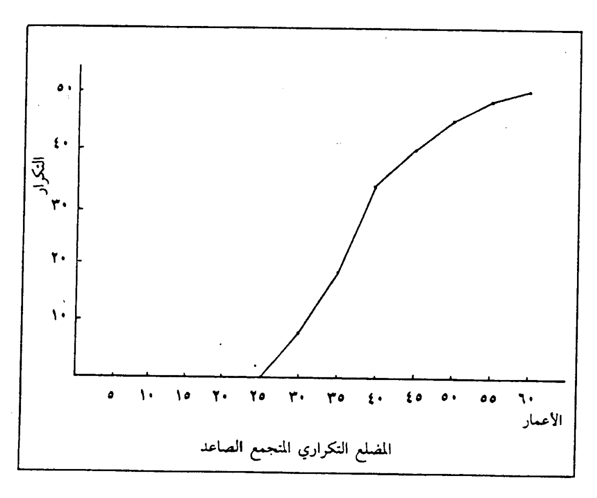
٢ ـ المدرج والمضلع التكراري:



٣ ـ لرسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد، نوجد أولاً التكرار المتجمع الصاعد، كما يلي:

جدول رقم (٧)

	التكرار الصاعد
أقل من ٢٥	صفر
أقل من ٣٠	٨
أقل من ٣٥	١٨
أقل من ٤٠	٣٣
أقل من ٤٥	٤٠
أقل من ٥٠	٤٥
أقل من ٥٥	٤٨
أقل من ٦٠	٥٠



المضلع التكراري المتجمع الصاعد



٢ – ٣

مقاييس النزعة المركزية (المتوسطات)

Measures of Central Tendency

(Averages)

الأهميــة

المتغيرات الكمية

المتوسـط الحسابي

المتوسط الحسابي المرجح

المتوسط الهندسي

المتغيرات الترتيبية (الوسيط)

المتغيرات الإسمية (المنوال)

٢-٣-١ الأهميـــة :

بعد تكوين التوزيع التكراري (الجدول التكراري) فإن الخطوة التالية هي البدء بدراسة خواص هذا التوزيع، أو التعبير عن خصائصه المميزة له. وقد تعرضنا في الباب الثاني لطرق عرض التوزيع التكراري بالرسم، ولا شك أن ذلك يوضح خواص التوزيع التكراري ولكن ليس بصورة دقيقة وكافية. ولذا فإنه لايعتمد على العرض البياني بدرجة كبيرة في وصف التوزيعات التكرارية ومقارنتها. وعليه فإنه من المفضل وصف التوزيع التكراري بمجموعة من الأرقام (مقاييس أو مؤشرات) تلخصه وتوضح خصائصه. وفي هذا الفصل نعرض أولى هذه المقاييس أو المؤشرات وهي مقاييس النزعة المركزية (أو المتوسطات) – حيث يلاحظ بصفة عامة، أن المشاهدات أو قيم الظاهرة تميل إلى التمركز (أو هناك نزعة نحو تمركزها) عند قيم معينة في مركز التوزيع التكراري. وهناك عدة أنواع من هذه المتوسطات نعرض منها المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمتوسط الهندسي .

ويستخدم المتوسط الحسابي والهندسي في حالة المتغيرات الكمية والوسيط للمتغيرات الترتيبية والمنوال للمتغيرات الإسمية .

والغرض من هذه المقاييس هو وصف المجموعة برقم واحد يمثلها فهو يغني عن مزيد من الوصف والتلخيص. ويفيد هذا الرقم المتوسط في المقارنات المستعرضة أو الآنية بين عدة مجموعات أو مجتمعات. كما يفيد في المقارنات التاريخية أو الطولية بما يمكن من وصف التغير أو التطور في الظاهرة عبر الزمن .

٢-٣-٢ المتغيرات الكمية :

المتوسط الحسابي : (Arithmetic Mean)

يعتبر المتوسط (أو الوسط) الحسابي أهم مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداماً. كما أنه يسهل حسابه. والوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو ناتج قسمة مجموع هذه القيم على عددها .

فإذا كان لدينا متغير يأخذ القيم ٣، ٤، ٥ فإن:

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع قيم المتغير}}{\text{عدد القيم}} = \frac{٣ + ٤ + ٥}{٣} = ٤$$

وبصفة عامة فإنه إذا ما رمزنا للمتغير بالرمز س وقيمه بالرموز $\text{س}_{١}$، $\text{س}_{٢}$، $\text{س}_{٣}$، . . . . .، $\text{س}_{\text{ن}}$، متوسطه الحسابي بالرمز $\bar{\text{س}}$، فإنه يمكن كتابة طريقة احتساب المتوسط الحسابي بالصيغة التالية:

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \qquad (٢-٣)$$

حيث مجـ س تعني مجموع قيم س، أي $\text{س}_{١} + \text{س}_{٢} + \ldots + \text{س}_{\text{ن}}$، ن عدد القيم.

خصائص المتوسط الحسابي:

١ – مجموع إنحرافات القيم عن وسطها الحسابي يساوي صفراً، أي أن:

$$\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}}) = \text{صفر}$$

ففي المثال السابق كان الوسط الحسابي $\bar{\text{س}} = ٤$ وعليه تكون إنحرافات القيم عن وسطها الحسابي هي (٣ – ٤)، (٤ – ٤)، (٥ – ٤) أي تساوي – ١، صفر، ١ وواضح أن مجموع هذه الإنحرافات يساوي صفراً.

٢ – إذا كانت س = د + أ   حيث أ ثابت فإن: (٢-٤)

$$\bar{\text{س}} = \bar{\text{د}} + \text{أ}$$

٣ – إذا كانت س = ل د   حيث ل ثابت فإن: (٢-٥)

$$\bar{\text{س}} = \text{ل}\,\bar{\text{د}}$$

٤ ــ إذا كانت س = ل د + أ حيث أ، ل ثوابت فإن: (٢-٦)
سَ = ل دَ + أ

وتفيدنا الخصائص السابقة في تسهيل احتساب المتوسط الحسابي فبدلاً من إيجاد المتوسط الحسابي للمتغير س مباشرة، تقوم بتحويله إلى متغير آخر د يمكن إيجاد متوسطه الحسابي دَ بسهولة. وبعد ذلك نستخدم العلاقات الموضحة بعاليه لإيجاد المتوسط الحسابي سَ للمتغير الأصلي س. ويظهر ذلك واضحاً عند إيجاد المتوسط الحسابي في حالة القيمة المبوبة في جدول تكراري.

إيجاد المتوسط الحسابي للقيم المبوبة :

(أ) الطريقة المباشرة : (Direct method)

تطبيـــق ١ :

بفرض أنه مطلوب إيجاد المتوسط الحسابي لدرجات الطلاب والموضحة بالجدول التكراري رقم (٢). إن علينا أن نقوم بإيجاد مجموع الدرجات كلها ثم قسمتها على ٥٠ وهو عدد الدرجات. أي أن:

$$\text{سَ} = \frac{\text{مجموع الدرجات}}{\text{عددها}}$$

يلاحظ أن الفئة الأولى تكرارها ٤ أي أن هناك ٤ طلاب حصلوا على درجات تقع في الفئة ٢٠ ــ ٣٠. وقد سبق أن ذكرنا أنه يفترض أن كل درجة من هذه الدرجات الأربع تساوي تماماً مركز الفئة وهي ٢٥. ولذا نستطيع القول أن مجموع الدرجات الأربع يساوي ١٠٠ أي حاصل ضرب التكرار في مركز الفئة. وبالمثل إذا ما انتقلنا إلى الفئة الثانية ٣٠ ــ ٤٠، فإن مجموع درجات الست طلاب هو ٦ × ٣٥ = ٢١٠ درجة، وهكذا. ويتضح ذلك من الجدول رقم (٨).

فإذا ما رمزنا لمركز الفئة بالرمز س وللتكرار بالرمز ك فإن:

$$\bar{س} = \frac{مجـ ك س}{ن} \quad \text{حيث ن = مجـ ك} \quad (٢-٧)$$

$$\bar{س} = \frac{٢٦٠٠}{٥٠} = ٥٢ \text{ درجة}$$

جدول رقم (٨)

الدرجات	التكرار ك	مركز الفئة س	التكرار × مركز الفئة ك س
٢٠ ــ ٣٠	٤	٢٥	١٠٠
٣٠ ــ ٤٠	٦	٣٥	٢١٠
٤٠ ــ ٥٠	١٢	٤٥	٥٤٠
٥٠ ــ ٦٠	١٤	٥٥	٧٧٠
٦٠ ــ ٧٠	٩	٦٥	٥٨٥
٧٠ ــ ٨٠	٣	٧٥	٢٢٥
٨٠ ــ ٩٠	٢	٨٥	١٧٠
	٥٠		٢٦٠٠

(ب) الطريقة المختصرة: (Short cut method)

وتعتمد هذه الطريقة على الخاصية رقم (٢) للوسط الحسابي والتي سبق ذكرها حيث يتم تحويل المتغير س إلى متغير آخر د = س - أ. وقيمة أ الملائمة هنا هي إحدى مراكز الفئات، ويفضل أن تكون الفئة التي يناظرها اكبر تكرار. وبـاعتبـار أ = ٥٥ فـإن قيم د تصبح عـلى التـوالي ٢٥ - ٥٥ = -٣٠، ٣٥ - ٥٥ = -٢٠، وهكذا. ويتم احتساب المتوسط الحسابي $\bar{د}$ كما اتبع في الطريقة المباشرة تماماً، ويوضح ذلك بالجدول رقم (٩).

جدول رقم (٩)

الدرجات	ك	س	د	ك د
٢٠ ــ ٣٠	٤	٢٥	-٣٠	-١٢٠
٣٠ ــ ٤٠	٦	٣٥	-٢٠	-١٢٠
٤٠ ــ ٥٠	١٢	٤٥	-١٠	-١٢٠
٥٠ ــ ٦٠	١٤	٥٥	صفر	صفر
٦٠ ــ ٧٠	٩	٦٥	١٠	٩٠
٧٠ ــ ٨٠	٣	٧٥	٢٠	٦٠
٨٠ ــ ٩٠	٢	٨٥	٣٠	٦٠
	٥٠			-١٥٠

$$\bar{د} = \frac{مجـ\ ك\ د}{ن} = \frac{-١٥٠}{٥٠} = -٣$$

$$\bar{س} = \bar{د} + أ = -٣ + ٥٥ = ٥٢ \text{ درجة}$$

(ج) **الطريقة القصيرة: (Coding method)**

وتعتمد هذه الطريقة على الخاصية رقم (٤) والتي سبق ذكرها، حيث يتم تحويل المتغير س إلى ةمتغير آخر $د = \frac{س - أ}{ل}$، وهذه الطريقة توفر كثيراً من العمل الحسابي اللازم ويفضل إتباعها في حالة التوزيعات التكرارية ذات الفئات المنتظمة، حيث تكون قيمة أ الملائمة هي إحدى مراكز الفئات (٥٥ مثلاً) وقيمة ل هي طول الفئة، وعليه فإن قيم د تصبح على التوالي $\frac{٢٥ - ٥٥}{١٠} = -٣$، $\frac{٣٥ - ٥٥}{١٠} = -٢$، $\frac{٤٥ - ٥٥}{١٠} = -١$ وهكذا، كما هو موضح بالجدول رقم (١٠).

جدول رقم (١٠)

الدرجات	ك	س	د	ك د
٢٠ ــ ٣٠	٤	٢٥	-٣	-١٢
٣٠ ــ ٤٠	٦	٣٥	-٢	-١٢
٤٠ ــ ٥٠	١٢	٤٥	-١	-١٢
٥٠ ــ ٦٠	١٤	٥٥	صفر	صفر
٦٠ ــ ٧٠	٩	٦٥	١	٩
٧٠ ــ ٨٠	٣	٧٥	٢	٦
٨٠ ــ ٩٠	٢	٨٥	٣	٦
	٥٠			-١٥

$\bar{د} = \frac{مجـ\ ك\ د}{ن} = \frac{-١٥}{٥٠} = -٠,٣$

$\bar{س} = ل\ \bar{د} + أ$

$= (١٠)(-٠,٣) + ٥٥$

$= -٣ + ٥٥ = ٥٢$ درجة

ويلاحظ أنه في حالة الفئات المنتظمة ليس من الضرورة حساب قيم المتغير د ويمكن وضعها رأساً بوضع إحدى هذه القيم صفراً وتكون القيم السابقة عليه على الترتيب -١، -٢، -٣، . . . وتكون القيم اللاحقة لها ١، ٢، ٣، ٤، . . . وهكذا.

ويتم حساب الوسط الحسابي باستخدام الصيغة التالية:

$\bar{س} = \bar{د}$ (طول الفئة) + مركز الفئة الصفرية

والفئة الصفرية هي الفئة المناظرة لقيمة د = صفر.

والمثال التالي يوضح ذلك.

□ **مثال ٢ :**

أوجد المتوسط الحسابي لتوزيع أعمار المستخدمين الموضح بالجدول رقم (٦) .

□ **الحل: باستخدام الطريقة المباشرة:**

جدول رقم (١١)

الأعمار	ك	س	س ك
٢٥ ــ ٣٠	٨	٢٧,٥	٢٢٠
٣٠ ــ ٣٥	١٠	٣٢,٥	٣٢٥
٣٥ ــ ٤٠	١٥	٣٧,٥	٥٦٢,٥
٤٠ ــ ٤٥	٧	٤٢,٥	٢٩٧,٥
٤٥ ــ ٥٠	٥	٤٧,٥	٢٣٧,٥
٥٠ ــ ٥٥	٣	٥٢,٥	١٥٧,٥
٥٥ ــ ٦٠	٢	٥٧,٥	١١٥
	٥٠		١٩١٥

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س\ ك}{ن} = \frac{١٩١٥}{٥٠} = ٣٨,٣ \text{ سنة}$$

□ **الحل: باستخدام الطريقة القصيرة:**

جدول رقم (١٢)

الأعمار	ك	د	ك د
٢٥ ــ ٣٠	٨	-٣	-٢٤
٣٠ ــ ٣٥	١٠	-٢	-٢٠
٣٥ ــ ٤٠	١٥	-١	-١٥
٤٠ ــ ٤٥	٧	صفر	صفر
٤٥ ــ ٥٠	٥	١	٥
٥٠ ــ ٥٥	٣	٢	٦
٥٥ ــ ٦٠	٢	٣	٦
	٥٠		-٤٢

$$\bar{d} = \frac{-٤٢}{٥٠}$$

$\bar{س}$ = $\bar{d}$ (طول الفئة) + مركز الفئة الصفرية

$$= \frac{-٤٢}{٥٠} (٥) + ٤٢,٥ = ٣٨,٣ \text{ سنة}$$

□ **مثال ٣ :**

فئات غير منتظمة:

أوجد المتوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي:

جدول رقم (١٣)

الفئات	التكرار
صفر – ٥	٩
٥ – ١٠	١٣
١٠ – ٢٠	١٥
٢٠ – ٤٠	١٨
٤٠ – ٥٠	٢٢
٥٠ – ٨٠	٨٥
٨٠ – ٩٠	٢٣
٩٠ – ٩٥	٨
٩٥ – ١٠٠	٧
	٢٠٠

□ **الحل:**

حيث أن الفئات غير منتظمة، يفضل استخدام الطريقة المباشرة، إذ أن الطرق الأخرى لا تسهل العمل الحسابي في هذه الحالة.

جدول رقم (١٤)

الفئات	ك	س	ك س
صفر – ٥	٩	٢,٥	٢٢,٥
٥ – ١٠	١٣	٧,٥	٩٧,٥
١٠ – ٢٠	١٥	١٥	٢٢٥
٢٠ – ٤٠	١٨	٣٠	٥٤٠
٤٠ – ٥٠	٢٢	٤٥	٩٩٠
٥٠ – ٨٠	٨٥	٦٥	٥٥٢٥
٨٠ – ٩٠	٢٣	٨٥	١٩٥٥
٩٠ – ٩٥	٨	٩٢,٥	٧٤٠
٩٥ – ١٠٠	٧	٩٧,٥	٦٨٢,٥
	٢٠٠		١٠٧٧٧,٥

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ ك س}}{\text{ن}} = \frac{\text{١٠٧٧٧,٥}}{\text{٢٠}} = \text{٥٣,٩}$$

المتوسط الحسابي المرجح : Weighted

في الحالات السابقة كان يتم احتساب المتوسط الحسابي بافتراض أن كل القيم لها نفس الأهمية، غير أن ذلك قد لا يكون صحيحاً بصفة عامة – فبفرض أننا بصدد احتساب متوسط سعر السوق لسلعة ما في إحدى المدن، وكانت هذه السلعة تباع في عدة أسواق بأسعار مختلفة وحسب البيان التالي:

السوق	سعر السلعة
أ	٩
ب	٧
ج	٥

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} = \frac{\text{٩ + ٧ + ٥}}{\text{٣}} = \text{٧}$$

وهذا المتوسط يكون صحيحاً فقط في حالة ما إذا كانت الأسواق الثلاثة لها نفس الأهمية، بمعنى أن كمية مبيعاتها واحدة، فإذا ما اختلفت كمية المبيعات فإنه يجب أخذ ذلك في الحسبان عند احتساب متوسط السعر. ويتم ذلك بترجيح الأسعار، أي إعطائها أوزان حسب أهميتها النسبية. ويتم ذلك باستخدام المتوسط الحسابي المرجح كما يلي:

$$(\bar{س})\text{المتوسط الحسابي المرجح} = \frac{\text{مجـ س و}}{\text{مجـ و}} \qquad (٢-٨)$$

حيث و تمثل الأوزان المخصصة للقيم المختلفة.

فبفرض أن كمية المبيعات في الأسواق المختلفة كانت ٥٠، ١٥٠، ٨٠٠ على الترتيب، فإنه يمكن استخدام هذه الكميات كأوزان تعبر عن الأهمية النسبية للأسعار المذكورة ويتم حساب المتوسط الحسابي المرجح كما يلي:

السوق	السعر س	كمية المبيعات و	س و
أ	٩	٥٠	٤٥٠
ب	٧	١٥٠	١٠٥٠
ج	٥	٨٠٠	٤٠٠٠
		١٠٠٠	٥٥٠٠

$$\text{المتوسط الحسابي المرجح} = \frac{\text{مجـ س و}}{\text{مجـ و}}$$

$$= \frac{٥٥٠٠}{١٠٠٠} = ٥,٥$$

□ مثال ٤ :

البيان التالي يمثل درجات أحد الطلاب في المواد المقررة، حيث تختلف عدد الساعات الأسبوعية المخصصة لدراسة كل مادة. أوجد المتوسط الحسابي المرجح:

المادة	الدرجة	عدد الساعات
أ	٩٥	٤
ب	٨٩	٣
ج	٨٥	٢
د	٦٠	١

□ الحل:

المادة	الدرجة س	عدد الساعات و	س و
أ	٩٥	٤	٣٨٠
ب	٨٩	٣	٢٦٧
ج	٨٥	٢	١٧٠
د	٦٠	١	٦٠
		١٠	٨٧٧

$$\text{المتوسط الحسابي المرجح} = \frac{\text{مجـ س و}}{\text{مجـ و}}$$

$$= \frac{٨٧٧}{١٠} = ٨٧,٧$$

□ مزايا المتوسط الحسابي:

(أ) يعتمد حسابه على كل القيم.

(ب) يسهل التعامل معه جبرياً.

□ عيوب المتوسط الحسابي:

(أ) يتأثر بالقيم المتطرفة أو الشاذة، فالمتوسط الحساب للقيم ٧، ٨، ٩ هو ٨. فإذا أضيف لهذه المجموعة إحدى القيم الشاذة ولتكن صفر فإن المتوسط الحسابي يتأثر كثيراً بها ويصبح ٦. وهذا الرقم لا يمثل المجموعة تمثيلاً صحيحاً.

(ب) لانستطيع استخدامه في حالة الفئات المفتوحة، حيث أن حسابه يتطلب معرفة مركز كل فئة .

(ج) لانستطيع استخدامه في حالة الظواهر الوصفية، غير الرقمية، فمثلا لانستطيع تحديده للبيانات : ممتاز – جيد جداً – جيد – مقبول – ضعيف .

المتوسط الهندسي : (Geometric mean)

يستخدم المتوسط الهندسي في دراسة الظواهر التي تزيد مفرداتها بنسبة ثابتة كما في دراسة النمو في الكائنات الحية ، كما في نمو السكان ، والحيوانات ، والحشرات ، والبكتريا،... إلخ – وكذا في حالة النمو الاقتصادي، وكذا يستخدم المتوسط الهندسي في دراسة التغيرات النسبية في الأسعار . وفي معالجة مثل هذه الظواهر فإن المتوسط الهندسي يفضل عن المتوسط الحسابي حيث يعطي نتائج أدق ؛ كما يتضح من الأمثلة أدناه .

والمتوسط الهندسي (هـ) للقيم $س_1$ ، $س_2$ ، .....، $س_ن$، يتم إيجاده باستخدام الصيغة التالية :

$$\text{هـ} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}_1\ \text{س}_2 \cdots \text{س}_\text{ن}} \qquad (٢-٩)$$

ولتسهيل العمل الحسابي نستخدم اللوغاريتمات ، حيث نوجد أولا قيمة

$$\text{لو هـ} = \frac{1}{\text{ن}}\ \text{مجـ لو س}$$

ومنها نوجد قيمة هـ .

وبالنسبة للقيم المبوبة في توزيع تكراري تستخدم الصيغة:

$$\text{هـ} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}_1^{\text{ك}_1}\ \text{س}_2^{\text{ك}_2} \ldots \text{س}_\text{م}^{\text{ك}_\text{م}}} \qquad (\text{٢-١٠})$$

أي أن $\text{لو هـ} = \frac{1}{\text{ن}}\ \text{مجـ ك لو س}$

ومنها نوجد قيمة هـ.

وبالمثل فإن صيغة المتوسط الهندسي المرجح، تصبح:

$$\text{هـ} = \sqrt[\text{مجـ و}]{\text{س}_1^{\text{و}_1}\ \text{س}_2^{\text{و}_2} \ldots \text{س}_\text{م}^{\text{و}_\text{م}}} \qquad (\text{٢-١١})$$

أو $\text{لو هـ} = \frac{\text{مجـ و لو س}}{\text{مجـ و}}$

□ مثال ٥ :

بفرض أن عدد السكان في بلد ما كان ٤ مليون نسمة عام ١٨٠٠، ٩ مليون عام ١٩٠٠. ما هو عدد السكان في منتصف الفترة أي في عام ١٨٥٠؟

□ الحل:

$\text{هـ} = \sqrt{(٤)(٩)} = ٦$ مليون نسمة

□ مثال ٦ :

تزايد عدد السكان في احدى الدول في عشر سنوات بمقدار ٢٠٪ وفي العشر سنوات التالية بنسبة ٣٠٪ وفي العشر سنوات التي تليها بنسبة ٤٥٪. ما هو متوسط معدل الزيادة؟

□ الحل:

$$هـ = \sqrt[3]{(120)\ (130)\ (145)} = 131,3$$

وعلى ذلك يكون متوسط نسبة الزيادة ٣١,٣

(لاحظ ان المتوسط الهندسي لنسب الزيادة لا يعطي النتيجة الصحيحة).,

□ مثال ٧ :

أوجد المتوسط الهندسي المرجح للبيانات التالية:

السلعة	منسوب السعر	الوزن
سلع غذائية	٤٨٠	٣٠
مواد خام	٥٠٧	١٦
مواد نصف مصنوعة	٤٦٢	١٠
مواد مصنعة	٢٨٠	٢٠
سلع غذائية	١٣٠	٤

منسوب السعر عبارة عن النسبة المئوية لسعر سلعة في سنة ما بالمقارنة بسنة أخرى .

□ الحل:

س	و	لو س	و لو س
٤٨٠	٣٠	٢,٦٨١	٨٠,٤٣٠
٥٠٧	١٦	٢,٧٠٥	٤٣,٢٨٠
٤٦٢	١٠	٢,٦٦٥	٢٦,٦٥٠
٢٨٠	٢٠	٢,٤٤٧	٥٣,٣٠٥
١٣٠	٤	٢,١١٤	٨,٤٥٦
	٨٠		٢١٢,١٢١

$$لو\ هـ = \frac{مجـ\ و\ لو\ س}{مجـ\ و} = \frac{212,121}{80} = 2,651$$

هـ = ٤٤٨,٢٤٢

٢-٣-٣ المتغيرات الترتيبية :

الوسيـط : (Median)

الوسيط هو قيمة المشاهدة التي يقع ترتيبها وسط المجموعة عند ترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً (أو تنازلياً) .

ويتم إيجاد ترتيب الوسيط بقسمة عدد القيم (ن) على ٢ ، غير أن حالة القيم الغير مبوبة يضاف لعدد القيم واحد ، وذلك حتى نحصل على الأوسط بدقة. أي أنه في حالة القيم غير المبوبة يكون

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{ن} + ١}{٢}$$

□ **مثال ٨ :**

لإيجاد الوسيط للقيم

٤، ٩، ٧، ٦، ٣، ٩، ٨

نقوم أولًا بترتيبها ترتيباً تصاعدياً ،

٣، ٤، ٦، ٧، ٨، ٩، ٩

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{ن}+١}{٢} = \frac{٧+١}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$$

قيمة الوسيط (و) = ٧ .

□ مثال: ٩

لإيجاد الوسيط للقيم

١، ٢، ٣، ٤، ٨، ٩، ٩، ١٠

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{ن + ١}{٢} = \frac{٨ + ١}{٢} = \frac{٩}{٢} = ٤,٥$$

في هذه الحالة، فإن قيمة الوسيط تقع بين القيمتين ذوي الترتيب الرابع والخامس، وبتحديد أكثر فإنها تزيد عن القيمة ذات الترتيب الرابع بنصف الفرق بين القيمتين ذوي الترتيب الرابع والخامس. أي أن

$$و = ٤ + \tfrac{١}{٢}(٨ - ٤) = ٦$$

البيانات المبوبة:

وبالنسبة للبيانات المبوبة في جدول تكراري فإن الوسيط هو القيمة التي تقسم التكرار الكلي ن(مجـ ك) إلى قسمين متساويين، أي أن ترتيب الوسيط هو $\frac{ن}{٢}$. ولحساب قيمة الوسيط يتم الاستعانة بالتكرار المتجمع الصاعد (ويمكن أيضاً باستخدام التكرار المتجمع النازل وبأسلوب مشابه لا ضرورة لعرضه).

تطبيق ١٠ :

فإذا أردنا حساب الوسيط لدرجات الطلاب الموضحة بالجدول رقم (٢) فإننا نقوم أولًا بإيجاد التكرار المتجمع الصاعد، وهذا موضح بالجدول أدناه.

جدول رقم (١٥)

الدرجات	التكرار	التكرار الصاعد
٢٠ ـ ٣٠	٤	٤
٣٠ ـ ٤٠	٦	١٠
٤٠ ـ ٥٠	١٢	٢٢
٥٠ ـ ٦٠	١٤	٣٦
٦٠ ـ ٧٠	٩	٤٥
٧٠ ـ ٨٠	٣	٤٨
٨٠ ـ ٩٠	٢	٥٠

نوجد أولاً ترتيب الوسيط وهو $\frac{ن}{٢} = \frac{٥٠}{٢} = ٢٥$

نريد الآن البحث عن القيمة التي تناظر الترتيب ٢٥، بالنظر إلى التكرار الصاعد الموضح بالجدول رقم (١٥) يتضح أن هناك ٢٢ طالباً (درجة) حصلوا على درجات تقل عن ٥٠، ويمكن القول بأن القيمة المناظرة للطالب الذي ترتيبه ٢٢ هي ٥٠ درجة. معنى ذلك أن الطالب الذي ترتيبه ٢٥ يقع في الفئة التالية وهي الفئة ٥٠ ــ ٦٠. أي أن الوسيط يقع في هذه الفئة، ولذا نسميها الفئة الوسيطية، وهذه الفئة تبدأ من ٥٠ درجة وتنتهي في ٦٠ وهذه الزيادة (طول الفئة) وقدرها ١٠ درجات نتجت بسبب إضافة ١٤ طالباً (تكرار الفئة الوسيطية) ولحساب الوسيط فإننا نأخذ في الحسبان فقط الزيادة المترتبة على إضافة ثلاث طلاب فقط، ٢٥ ــ ٢٢ (أي ترتيب الوسيط ناقصاً التكرار الصاعد السابق للفئة الوسيطية) على ذلك فإن الوسيط يمكن حسابه كما يلي:

$$٥٠ + \frac{٣}{١٤}(١٠) = ٥٠ + ٢,١٤ = ٥٢,١٤ \text{ درجة}$$

وعلى ذلك فإن الوسيط يتم حسابه باستخدام الصيغة التالية:

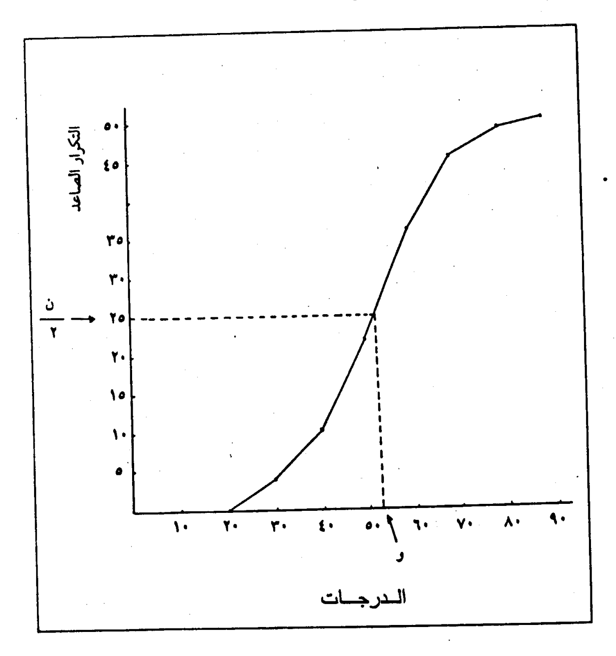
$$\text{الوسيط} = \text{بداية الفئة الوسيطية} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار الصاعد السابق للفئة الوسيطية}}{\text{التكرار الأصلي للفئة الوسيطية}} \times \text{طول الفئة الوسيطية}$$

ويمكن الاختصار بكتابة الصيغة التالية، حيث يعني كل رمز المعنى المناظر له بالصيغة أعلاه

$$و = ب + \frac{ت - ك.ص.س}{ك} \times ل \qquad (١٢-٢)$$

إيجاد الوسيط بالرسم:

ويمكن بسهولة إيجاد الوسيط بعد رسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد كما يتضح من الشكل التالي، حيث تحدد القيمة (الدرجة) على المحور الأفقي والتي تناظر ترتيب الوسيط وهو ٢٥ . . .



☐ مثال: ١١

أوجد الوسيط للبيانات الموضحة بالجدول التكراري التالي:

جدول رقم (١٦)

الفئات	التكرار	التكرار الصاعد
أقل من ١٠	٥	٥
١٠ ــ ٢٠	٢٥	٣٠
٢٠ ــ ٣٠	٤٠	٧٠
٣٠ ــ ٤٠	٧٠	١٤٠
٤٠ ــ ٥٠	٩٠	٢٣٠
٥٠ ــ ٦٠	٤٠	٢٧٠
٦٠ ــ ٧٠	٢٠	٢٩٠
٧٠ فأكثر	١٠	٣٠٠

ترتيب الوسيط = $\frac{ن}{٢}$ = $\frac{٣٠٠}{٢}$ = ١٥٠

إذن الفئة الوسيطية هي الفئة ٤٠ ــ ٥٠

و = ٤٠ + $\frac{١٥٠ - ١٤٠}{٩٠}$ × ١٠

= ٤٠ + $\frac{١٠}{٩٠}$ × ١٠ = ٤١,١

□ مزايا الوسيط:

(أ) لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

(ب) يمكن إيجاده للظواهر الغير رقمية التي يمكن ترتيبها، مثال ذلك درجات الطلاب على أساس ممتاز، جيد جداً، . . . الخ والحالة الاجتماعية والاقتصادية على أساس عالية جداً، متوسط. . . الخ.

(ج) يمكن إيجاده في حالة الفئات المفتوحة.

□ عيوب الوسيط:

(أ) لا يعتمد في حسابه على كل قيم المتغير.

(ب) لا يسهل التعامل معه جبرياً.

٢-٣-٤ المتغيرات الإسمية:

المنـوال : (Mode)

المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الشائعة بين هذه القيم، وبعبارة أخرى هي القيمة صاحبة اكبر تكرار. فإذا كان لدينا القيم ٢، ، ٧، ٨، ٣، ٥، ٧، ٨، ٦، ٧ فإن المنوال هو ٧ حيث أن هذا العدد تكرر ثلاث مرات وهو اكبر تكرار. وأحياناً لا يكون للقيم منوال كما في حالة البيانات التالية: ٦، ٧، ٣، ٥، ٢، ٩. حيث لا توجد قيمة لها تكرار اكبر من القيم الأخرى. وأحياناً يكون للظاهرة منوالين أو أكثر. مثال ذلك البيانات التالية:

القيمة	٢	٣	٦	٤	٩
التكرار	١	٤	٣	٤	٢

لها منوالين هما ٣، ٤.

وهذه على أي حال من عيوب المنوال، حيث قد لا توجد قيمة وحيدة له.

البيانات المبوبة:

في حالة البيانات المبوبة في جدول تكراري، لا نستطيع التحدث عما إذا كانت هناك قيمة معينة لها أكبر تكرار، حيث تذوب القيم في الفئات المختلفة. وعليه فإننا نعرف الفئة المنوالية، وهي الفئة المناظرة لأكبر تكرار. وبعد تحديد الفئة المنوالية يتم تحديد قيمة تقريبية للمنوال، ويتم ذلك بعدد مختلف من الطرق نعرض منها ما يلي:

١ ـ مركز الفئة المنوالية:

وتعد هذه الطريقة سهلة، حيث تعتبر قيمة المنوال هي مركز الفئة المنوالية. ولكن هذه الطريقة غير دقيقة، حيث أنها تتجاهل تماماً تأثير تكرارات الفئات الأخرى.

فبالنسبة للتوزيع التكراري لدرجات الطلاب والموضح بالجدول رقم (٢)

نجد أن الفئة المنوالية هي ٥٠ ــ ٦٠ وهي الفئة المناظرة لأكبر تكرار وهو ١٤.
وعلى ذلك فإن قيمة المنوال باستخدام هذه الطريقة تكون ٥٥.

٢ ــ طريقة الفروق (بيرسون):

تعتبر هذه الطريقة أفضل وأدق الطرق، حيث يتم تحديد المنوال بواسطة ثلاث فئات، الفئة المنوالية والفئة السابقة لها والفئة اللاحقة عليها. ويستخدم في ذلك الصيغة التالية:

$$\text{المنوال (مـ)} = \text{بداية الفئة المنوالية} + \frac{ف_1}{ف_1 + ف_2} \times \text{طول الفئة المتوالية}$$

حيث:

$ف_1$ = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة السابقة لها.

$ف_2$ = الفرق بين تكرار الفئة المتوالية والفئة اللاحقة عليها.

تطبيــق ١٢ :

وبتطبيق ذلك على التوزيع التكراري لدرجات الطلاب الموضح بالجدول رقم (٢) نجد أن :

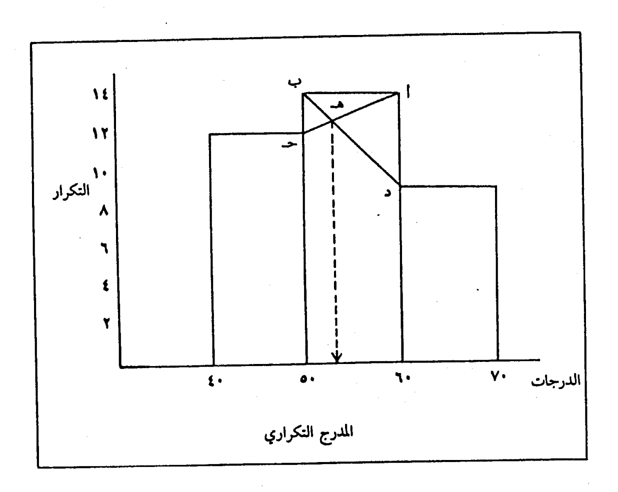
$$هـ = ب + \frac{ف_1}{ف_1 + ف_2} \times ل \qquad (٢-١٣)$$

$$= ٥٠ + \frac{(١٤ - ١٢)}{(١٤ - ١٢) + (١٤ - ٩)} \times ١٠$$

$$= ٥٠ + \frac{٢}{٢ + ٥} \times ١٠ = ٥٠ + ٢,٨٦ = ٥٢,٨٦ \text{ درجة}$$

٣ ــ إيجاد المنوال بالرسم:

يمكن بسهولة ايجاد المنوال بالرسم باستخدام المدرج التكراري، كما هو موضح أدناه، حيث يتم توصيل رؤوس المستطيل الممثل للفئة المنوالية بالمستطيلين السابق واللاحق، أي توصيل النقاط أحـ، ب د. والنقطة هـ وهي نقطة تقاطع المستقيمين أحـ، ب د تحدد لنا قيمة المنوال على المحور الأفقي،



المدرج التكراري

ويلاحظ أن قيمة المنوال المحددة بالرسم قريبة جداً من القيمة التي سبق تحديدها بطريقة الفروق وهي ٥٢,٨٦، وفي الحقيقة فإنه إذا ما كان الرسم دقيقاً فإن القيمة المحددة بالرسم يجب أن تساوي القيمة المحددة بطريقة الفروق حيث أنهما يعتمدان على فكرة واحدة.

ويلاحظ أننا لم نرسم المدرج التكراري كاملاً، حيث أن المنوال يتم تحديده بثلاث فئات فقط وهي الفئة المنوالية والفئة السابقة واللاحقة.

إيجاد المنوال في التوزيعات غير المنتظمة:

يتم أيضاً استخدام نفس الطرق السابقة ولكن بعد تعديل التكرارات، وتحصل على التكرارات المعدلة بكل فئة بقسمة التكرار الأصلي على طول الفئة، كما يتضح من المثال الآتي:

□ **مثال ١٣ :**

أوجد المنوال للتوزيع التكراري الموضح فيما يلي:

جدول رقم (١٧)

الفئات	التكرار
صفر ــ ٢	٢
٢ ــ ٦	١٠
٦ ــ ١٠	١٦
١٠ ــ ٢٠	٢٠
٢٠ ــ ٣٠	١٥
٣٠ ــ ٥٠	١٠

□ **الحل:**

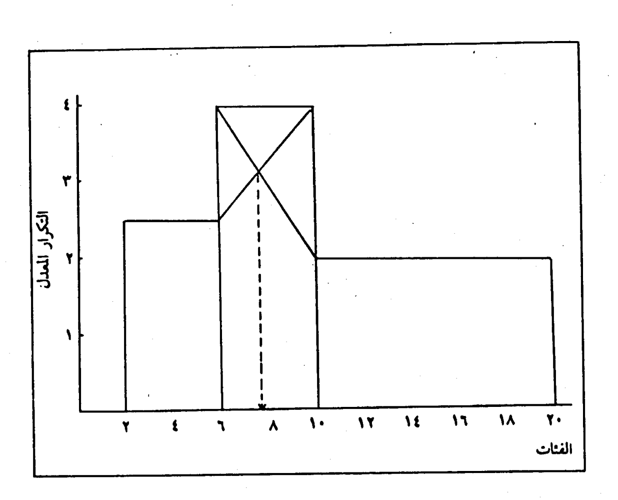
حيث أن الفئات غير منتظمة نقوم **أولاً** بتعديل التكرارات كما يلي:

الفئات	التكرار	طول الفئة	التكرار المعدل
صفر ــ ٢	٢	٢	١
٢ ــ ٦	١٠	٤	٢,٥
٦ ــ ١٠	١٦	٤	٤
١٠ ــ ٢٠	٢٠	١٠	٢
٢٠ ــ ٣٠	١٥	١٠	١,٥
٣٠ ــ ٥٠	١٠	٢٠	٠,٥

$$\text{مـ} = \text{بداية الفئة المنوالية} + \frac{\text{ف}_{1}}{\text{ف}_{1} + \text{ف}_{2}} \times \text{طول الفئة المنوالية}$$

$$= \text{٦} + \frac{\text{١,٥}}{\text{١,٥} + \text{٢}} \times \text{٤} = \text{٧,٧١٤}$$

ويمكن تحديد قيمة المنوال أيضاً باستخدام المدرج التكراري كما هو موضح بالشكل الآتي:



□ مزايا المنوال:

(أ) لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

(ب) يمكن إيجاده للظواهر غير الرقمية حتى التي لا يمكن ترتيبها مثل الحالة الاجتماعية (أعزب، متزوج، ..) وفصيلة الدم (أ، ب، أب، و).

□ عيوب المنوال:

(أ) لا يعتمد في حسابه على كل قيم المتغير.

(ب) لا يسهل التعامل معه جبرياً.

العلاقة بين المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال:

توجد علاقة تجريبية بين المتوسطات الثلاث التي سبق ذكرها وهي المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال وهي:

مـ = ٣و - ٢س (٢-١٤)

وهذه العلاقة صحيحة في التوزيعات ذات المنحنى التكراري القريب من التماثل. وتفيدنا في الحصول على قيمة تقريبية لأي من هذه المتوسطات بمعرفة المتوسطين الآخرين.

تمارين الفصل ٢-٣

١٤ - الآتي أطوال عينة من المسامير الصلب (بالسنتيمتر) من إنتاج إحدى الشركات. والمطلوب إيجاد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

الطول	٣,٨-	٣,٩-	٤-	٤,١-	٤,٢-	٤,٣-	٤,٤-	٤,٥-٤,٦
العدد	٣	١٥	٣٢	٢٩	١١	٧	٢	١

□ الحل:

المتوسط الحسابي = ٤,١١٤، الوسيط = ٤,١، المنوال = ٤,٠٨٥

١٥ - قطعت سيارة رحلتها على ثلاث سرعات مختلفة كما هو موضح بالبيان التالي، أوجد متوسط سرعة السيارة خلال الرحلة:

الفترة	السرعة كيلو / ساعة	الزمن (ساعة)
الأولى	٣٠	٥
الثانية	٧٠	٣
الثالثة	٨٠	٢

□ الحل:

$$\bar{س} = \frac{مجـ س و}{مجـ و} = \frac{٥٢٠}{١٠} = ٥٢ \text{ كم/ساعة}$$

١٦ - في إحدى المكتبات العامة، تم إعداد البيان التالي وهو يوضح عدد مرات تداول الكتاب خلال العام السابق والمطلوب إيجاد الموسط الحسابي والوسيط.

عدد مرات تداول الكتاب	صفر ـ ٢	٢ ـ ٤	٤ ـ ٨	٨ ـ١٢	١٢ ـ ١٨	١٨ ـ ٢٤	٢٤ ـ ٣٠
التكرار	٧٠٠٠	٢٠٠٠	٦٠٠	٢٠٠	١٠٠	٤٠	١٠

□ الحل:

المتوسط الحسابي = ٢,١٣

$$\text{الوسيط} = \text{صفر} + \frac{٤٩٧٥ - \text{صفر}}{٧٠٠٠} \times ٢ = ١,٤٢١$$

١٧ ـ في إحدى الصناعات كانت نسبة التغير في الانتاج في الثلاث سنوات السابقة هي ١,٦، ٢، ٢,٥ أوجد متوسط نسبة التغير.

□ الحل:

$$\text{هـ} = \sqrt[٣]{(١,٦)(٢)(٢,٥)} = ٢$$

□ □ □

١٨ – لمجموعة القيم التالية، أوجد (أ) المدى (ب) الوسيط (جـ) المنوال (د) الربيع الأول راجع (٢-٦-١) .

٤	٥	٣	٧	٤	٤	٥	٤
٧	٤	٦	٥	٦	٤	٤	٧
٤	٤	٥	٤	٤	٣	٦	

□ **الحـــل** : ترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً .

٣	٣	٤	٤	٤	(٤)	٤	٤
٤	٤	٤	(٤)	٤	٥	٥	٥
٥	٦	٦	٦	٧	٧	٧	

(أ) المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة

= ٧ – ٣ = ٤

(ب) ترتيب الوسيط = $\frac{ن + ١}{٢}$ = $\frac{٢٣ + ١}{٢}$ = $\frac{٢٤}{٢}$ = ١٢

قيمة الوسيط = ٤ (القيمة الثانية بين قوسين)

(جـ) المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً ويمكن تحديدها مباشرة بأعداد التوزيع التكراري التالي :

القيمة	٣	٤	٥	٦	٧
التكرار	٢	١١	٤	٣	٣

إذن المنوال هو ٤

(د) ترتـــيب $ر_١$ = $\frac{ن + ١}{٤}$ = $\frac{٢٣ + ١}{٤}$ = $\frac{٢٤}{٤}$ = ٦

$ر_١$ = ٤ **(القيمة الأولى بين قوسين)**

١٩ – التوزيع التكراري التالي يوضح فترة إعارة الكتاب في إحدى المكتبات : والمطلوب إيجاد كل من الوسيط والمنوال .

فترة إعارة الكتاب (يوم)	١–٣	٣–٦	٦–١٠	١٠–٢٠
التكرار ٪	٤٠	٣٠	٢٠	١٠

□ الحـــل :

فترة الإعارة	التكرار	التكرار الصاعد	طول الفئـة	التكرار المعدل
١–٣	٤٠	٤٠	٢	٢٠
٣–٦	٣٠	٧٠	٣	١٠
٦–١٠	٢٠	٩٠	٤	٥
١٠–٢٠	١٠	١٠٠	١٠	١

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{ن}}{٢} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

الفئة الوسيطية (٣–٦)

$$\text{قيمة الوسيط و} = \text{ب} + \frac{\text{ت} - \text{ك ص س}}{\text{ك}} \times \text{ل}$$

$$= ٣ + \frac{٥٠ - ٤٠}{٣٠} \times ٣ = ٤$$

الفئة المنوالية (١–٣)

$$\text{قيمة المنوال مـ} = \text{ب} + \frac{\text{ف}_١}{\text{ف}_١ + \text{ف}_٢} \times \text{ل}$$

$$= ١ + \frac{٢٠}{٢٠ + ١٠} \times ٢ = ٢,٣٣$$

٢٠ - في دراسة للأسرة في أحد المجتمعات، قام أحد الباحثين بإعداد التوزيع التكراري التالي، عن دخل الأسرة الشهري (ألف ريال) .

دخل الأسرة	٢-٥	٥-٧	٧-٩	٩-١٣	١٣ فأكثر
عدد الأسر	٥٦	٨١	٣٨	١٧	٨

أوجد (أ) التوزيع التكراري النسبي (الأصلي والمتجمع الصاعد)

(ب) نسبة الأسر التي يقل دخلها عن ٧٠٠٠ ريال

(جـ) عدد الأسر التي يقل دخلها عن ٩٠٠٠ ريال

(د) الوسيـط .

(أ)

دخـل الأسرة	التكرار	التكرار الصاعد	التوزيع النسبي الأصلي	التوزيع النسبي الصاعد
٢-٥	٥٦	٥٦	٠,٢٨	٠,٢٨
٥-٧	٨١	١٣٧	٠,٤١	٠,٦٩
٧-٩	٣٨	١٧٥	٠,١٩	٠,٨٧
٩-١٣	١٧	١٩٢	٠,٠٨	٠,٩٦
١٣ فأكثر	٨	٢٠٠	,٠٤	١
	٢٠٠		١	

(ب) ٦٩ ٪ (جـ) ١٧٥

(د) الوسيط = ٥ + $\frac{١٠٠ - ٥٦}{٨١}$ × ٢ = ٦,٠٨٦

٢١ – فيما يلي بيان بأعداد المتخرجين من الجامعة من أصل فوج معين وعدد سنوات بقاء كل منهم بالدراسة . والمطلوب حساب متوسط عدد سنوات الدراسة للطالب بالمرحلة الجامعية .

عدد الخريجين	٣٥٠	٣٠٠	١٥٠	١٠٠	٥٠
سنوات الدراسة	٤	٥	٦	٧	٨

الحل : المتوسط الحسابي (المرجح) = $\frac{\text{مجـ س و}}{\text{مجـ و}}$ $\frac{٤٩٠٠}{٩٥٠}$ = ٥,١٥٨

٢٢ – التوزيع التالي يعرض نسبة الأمية في كل من الريف والحضر في مجتمع معين .

والمطلوب :

إيجاد نسبة الأمية في المجتمع كله

المنطقة	عدد السكان ٪	نسبة الأمية
الريف	٨٠	٨٠
الحضر	٢٠	٣٠

□ الحل :

المنطقة	عدد السكان و	نسبة الأمية س	س و
ريف	٨٠	٨٠	٦٤٠٠
حضر	٢٠	٣٠	٦٠٠
	١٠٠		٧٠٠٠

$$\bar{س} = \frac{مجـ س و}{مجـ و} = \frac{٧٠٠٠}{١٠٠} = ٧٠$$

٢٣ – البيان التالي يوضح توزيع دخل الأسرة في الشهر (ألف ريال) في أحد المجتمعات .

المطلوب :

(أ) إيجاد المتوسط الحسابي لدخل الأسرة

(ب) إيجاد الوسيط

دخل الأسرة	١–٥	٥–٩	٩–١٣	١٣–١٧	١٧–٢١
التكرار	٤٠	٣٠	١٥	١٠	٥

□ الحـــل :

دخل الأسرة	ك	س	س ك	التكرار الصاعد
١–٥	٤٠	٣	١٢٠	٤٠
٥–٩	٣٠	٧	٢١٠	٧٠
٩–١٣	١٥	١١	١٦٥	٨٥
١٣–١٧	١٠	١٥	١٥٠	٩٥
١٧–٢١	٥	١٩	٩٥	١٠٠
	١٠٠		٧٤٠	

(أ) $\bar{س} = \frac{٧٤٠}{١٠٠} = ٧,٤$

(ب) ترتيب الوسيط = $\frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$

و = ٥ + $\frac{٥٠-٤٠}{٣٠} \times ٤ = ٦,٣٣$

٢ – ٤

النسب والمعدلات

Ratios and Rates

- النسب
- نسبة التغير
- المعـدلات
- المعدلات المعيارية

٢-٤
النسب والمعدلات
Ratios and Rates

تستخدم النسب والمعدلات كثيراً بغرض تحقيق مزيد من الإيضاح والإفصاح عن طبيعة الظاهرة محل البحث، كما تستخدم لتسهيل إجراء المقارنات بين الظواهر .

٢-٤-١ النسب :

وتعرف النسبة (Ratio) لعدد ما وليكن س إلى عدد آخر ص على أنها خارج قسمة س على ص. وقد يتم عرضها أحياناً كنسبة مئوية .

وللنسبة تطبيقات كثيرة ومن الأمثلة على ذلك :

$$\text{نسبة النوع} = \frac{\text{عدد الذكور}}{\text{عدد الإناث}} \times ١٠٠$$

$$\text{نسبة الكثافة السكانية} = \frac{\text{عدد السكان}}{\text{المساحة بالكيلو متر أو الميل المربع}}$$

$$\text{نسبة الذكاء} = \frac{\text{العمر العقلي}}{\text{العمر الزمني}} \times ١٠٠$$

$$\text{النسبة التعليمية} = \frac{\text{العمر التحصيلي}}{\text{العمر الزمني}} \times ١٠٠$$

وهناك نوع خاص من النسب، حيث تكون س جزء من ص، مثل نسبة عدد الطلاب الناجحين بالثانوية العامة، والرقم $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ هنا يطلق عليه نسبة (Proportion) . مثال ذلك أيضاً نسبة البطالة، نسبة الأمية، نسبة الذكور، نسبة الأجانب من العاملين، نسبة المدخنين.. إلخ .

٢-٤-٢ نسبة التغير Change Ratio :

وهي نوع من النسب يعتمد على الزمن وتعرف نسبة التغير بأنها النسبة بين مقدار التغير خلال زمنين إلى المقدار في البداية. وتكون النسبة موجبة في حالة الزيادة وسالبة في حالة النقص .

$$ق = \frac{س_٢ - س_١}{س_١} \times ١٠٠ \qquad (٢-١٥)$$

حيث ق نسبة التغير

$س_١$ المقدار في الزمن الأول

$س_٢$ المقدار في الزمن الثاني

تطبيـق :

مدينة عدد سكانها ٣٧٨ ألف عام ١٩٧٥ أصبح عددها ٥٢٥ ألف عام ١٩٨٥. ماهي نسبة الزيادة .

$$نسبة\ الزيادة = \frac{٥٢٥ - ٣٧٨}{٣٧٨} = ٠,٣٩$$

٢-٤-٣ المعـدلات :

وهناك نوع آخر من النسب ويعد من المؤشرات الهامة وهو ما يطلق عليه المعدل حيث أن النسبة في حد ذاتها قد تكون رقم كسري صغير جداً. ولذا يتم ضربها في رقم ثابت يتفق عليه وغالباً ما يكون ١٠٠ أو ١٠٠٠ أو ١٠٠٠٠٠ حسب الأحوال. وغالباً ما يستخدم لعرض معدل التغير في وحدة الوقت. ومن أمثلة المعدلات المعروفة :

$$\text{معدل المواليد الخام} = \frac{\text{عدد المواليد أحياء في السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{معدل الوفيات الخام} = \frac{\text{عدد الوفيات أثناء السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{معدل الوفيات من الأطفال الرضع} = \frac{\text{عدد الوفيات من الأطفال (أقل من سنة أثناء السنة}}{\text{عدد المواليد أثناء السنة}} \times ١٠٠٠$$

$$\text{معدل الخصوبة} = \frac{\text{عدد المواليد أثناء السنة}}{\text{عدد النساء في سن الحمل في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠$$

معدل الزيادة الطبيعية للسكان = معدل المواليد الخام – معدل الوفيات الخام

معدل انتشار مرض معين في لحظة معينة The Point Prevalence .

$$= \frac{\text{عدد المرضى بهذا المرض في تلك اللحظة}}{\text{عدد السكان المعرضين لخطر المرض في تلك اللحظة}} \times ١٠٠$$

معدل حدوث المرض In Cidence Rate

$$= \frac{\text{عدد المصابين بالمرض أثناء السنة}}{\text{عدد السكان المعرضين لخطر المرض في منتصف السنة}} \times ١٠٠$$

$$\text{معدل الجريمة} = \frac{\text{عدد الجرائم أثناء السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times ١٠٠٠٠٠$$

٢-٤-٤ المعدلات المعيارية Standardized Rates :

المعايرة Standardization هي إحدى الأساليب التي تستخدم لإلغاء الآثار المتواجدة في البيانات بفعل بعض العوامل والتغيرات الغير مرغوب فيها .

والمعدلات المعيارية تُعد من الأساليب الهامة للوصف وخاصة لأغراض المقارنات. فمثلاً معدل الوفيات الخام لا يعد كافياً لأغراض المقارنات سواء بين المجتمعات المختلفة أو بين فترات مختلفة للمجتمع نفسه وذلك بسبب اختلاف البناء السكاني، إن توزيع السكان حسب العمر مثلاً يؤثر على معدل الوفيات الخام، فهذا المعدل يبدو كبيراً إذا كان المجتمع يحوي نسبة كبيرة من المسنين، حيث تزداد معدلات الوفاة في هذه الفئة . وبالعكس فإن معدل الوفيات الخام يبدو قليلًا إذا كان المجتمع يحوي نسبة عالية من الأطفال والشباب ، حيث تقل معدلات الوفيات في تلك الفئات .

وعلى ذلك يفضل، خاصة لأغراض المقارنات حساب معدلات الوفيات بعد استبعاد أثر التركيب العمري . وهذا هو ما يتبع غالباً حيث يتم تعديل معدلات الوفيات أو معايرتها ، لإستبعاد أثر العوامل المؤثرة عليها مثل العمر والجنس والسلالة ، .... إلخ .

وهناك عدة طرق تستخدم في تعديل أو معايرة المعدلات ، ومن أكثرها شيوعاً طريقة المعايرة المباشرة Direct Standardization .

وفي هذه الطريقة يتم اختيار مجتمع معياري Standard Population يتم على أساسه الحساب. وهذا المجتمع المعياري قد يكون أحد المجتمعات محل المقارنة أو المتوسط الحسابي لتوزيعها أو مجتمع آخر بعيداً عن هذه المجتمعات. فمثلًا عند المقارنة بين عدة محافظات يمكن أخذ مجتمع السكان بالدولة كمجتمع عياري .

ويتم حساب العدد المعياري (مـ) باستخدام المتوسط الحسابي المرجح ، يمكن عرضها في الصيغة العامة التالية :

$$\text{مـ} = \frac{\text{مجـ س و}}{\text{مجـ و}} \qquad (١٦-٢)$$

حيث :

س المعدل الخاص بالفئة

و التكرار النسبي للفئة بالمجتمع المعياري

تطبيـق ٢ :

البيان التالي يعرض ثلاثة توزيعات حسب العمر وهي: توزيع الوفيات وتوزيع السكان الفعلي وتوزيع السكان المعياري والمطلوب إيجاد:

- معدل الوفيات الخام
- معدل الوفيات المعياري

فئات العمر	عدد الوفيات	حجم السكان	المجتمع المعياري
٠–٢٠	٢٤	٣٠٠٠	٣٢٠
٢٠–٤٠	١٢	٤٠٠٠	٢٦٠
٤٠–٦٠	٥٢	٤٠٠٠	٢٤٠
٦٠ فأكثر	١٦٠	٢٠٠٠	١٨٠

الحـــل :

الفئات	عدد الوفيات	حجم السكان	س	و	س و
٠–٢٠	٢٤	٣٠٠٠	٨	٣٢٠	٢٥٦٠
٢٠–٤٠	١٢	٤٠٠٠	٣	٢٦٠	٧٨٠
٤٠–٦٠	٥٢	٤٠٠٠	١٣	٢٤٠	٣١٢٠
٦٠ فأكثر	١٦٠	٢٠٠٠	٨٠	١٨٠	١٤٤٠٠
	٢٤٨	١٣٠٠٠		١٠٠٠	٢٠٨٦٠

معدل الوفيات الخام = $\frac{٢٤٨}{١٣٠٠٠} \times ١٠٠٠ = ١٩$

معدل الوفيات المعياري = $\frac{٢٠٨٦٠}{١٠٠٠} = ٢٠,٩$

٢ – ٥

الأرقام القياسية

Index Numbers

٢ - ٥

الأرقـــام القياسيـــة

Index Numbers

٢-٥-١ الأهميـة :

الرقم القياسي هو مؤشر أو مقياس للتغير النسبي في متغير ما أو في مجموعة من المتغيرات في فترة معينة بالمقارنة بفترة سابقة. فمثلاً إذا كان سعر سلعة ما في سنة ١٩٧٠ هو ٥٠ ريالاً وأصبح ٩٠ ريالا في سنة ١٩٨٠ فإن الرقم القياسي للسعر في سنة ١٩٨٠ باعتبار أن ١٩٧٠ هي سنة الأساس هو:

$$\frac{٩٠}{٥٠} \times ١٠٠ = ١٨٠٪$$

فالرقم القياسي يعرض كنسبة مئوية ــ علّى أن علامة النسبة المئوية غالباً ما تحذف وتسمى سنة ١٩٧٠ بسنة الأساس، وسنة ١٩٨٠ سنة المقارنة. . ويوضح الرقم القياسي أن سعر السلعة زاد في سنة المقارنة ٨٠٪ عما كان عليه في سنة الأساس وعموماً فإن لكل رقم قياسي فترة أساس. وفي هذا المثال فإن فترة الأساس هي سنة ١٩٧٠. وغالباً ما يعبر عن ذلك بـ ١٩٧٠ =١٠٠

ويتم اختيار فترة الأساس بحيث تكون فترة طبيعية مستقرة لا تتضمن ظروف غير عادية كالحروب أو الاضرابات أو الكساد أو المجاعة. وفترة الأساس قد تكون يوم معين أو منتصف شهر معين أو سنة أو عدة سنوات.

وتستخدم الأرقام القياسية لقياس التغير الذي يطرأ على العديد من الظواهر الاقتصادية والاجتماعية، مثل تغيرات الأسعار، وتغيرات القوة الشرائية للنقود، الدخل القومي، الاستهلاك، الإنتاج، الصادرات، الواردات،

البطالة، تكاليف المعيشة، الأجور، أرباح الشركات، إنتاجها، مبيعاتها، . . . الخ.

وللملائمة نكتفي بعرض الأرقام القياسية للأسعار، حيث أن تكوين الأرقام القياسية للظواهر الأخرى كالكميات أو القيم يتم بنفس الأسلوب.

٢-٥-٢ الأرقام القياسية البسيطة :

في حالة قياس التغير في سعر إحدى السلع، كما في المثال أعلاه، فإن الرقم القياسي يتم إيجاده كما يلي:

$$\text{الرقم القياسي} = \frac{س_١}{س_٠} \times ١٠٠$$

حيث $س_١$ تمثل سعر السلعة في سنة المقارنة.
$س_٠$ سعر السلعة في سنة الأساس.

وفي حالة قياس التغير في أسعار مجموعة من السلع فإن:

$$\text{الرقم القياسي للأسعار} = \frac{مج\ س_١}{مج\ س_٠} \times ١٠٠$$

فإذا كان لدينا مجموعة السلع التالية:

السلعة	اسعار ١٩٧٠ $س_٠$	أسعار ١٩٨٠ $س_١$
لبن	٢٠	٣٠
دجاج	٥٠	٩٠
خبز	١٠	٢٠
	٨٠	١٤٠

$$\text{الرقم القياسي للأسعار} = \frac{١٤٠}{٨٠} \times ١٠٠ = ١٧٥$$

ويلاحظ أن الرقم القياسي البسيط يتجاهل الأهمية النسبية للسلع، كما أنه يتغير بتغير وحدة قياس الكمية، فمثلاً سعر اللبن الموضح يناظر كمية معينة، فإذا ما تغيرت الكمية يتغير السعر، وبالتالي يتغير الرقم القياسي المحسوب.

ولذلك فإنه يفضل استخدام الأرقام القياسية المرجحة.

٢-٥-٣ الأرقام القياسية المرجحة :

تختلف الأرقام القياسية المرجحة بإختلاف الأوزان التي تستخدم في الترجيح، وهي متعددة، نذكر اكثرها استخداماً.

(أ) الرقم القياسي المرجح بكميات سنة الأساس:

ويعرف برقم (لاسبير) وصيغته كما يلي:

$$\text{الرقم القياسي للأسعار} = \frac{\text{مجـ } س_{١} ك_{٠}}{\text{مجـ } س_{٠} ك_{٠}} \times ١٠٠ \qquad (١٧-٢)$$

حيث $ك_{٠}$ ترمز إلى كميات السلع في سنة الأساس.

(ب) الرقم القياسي المرجح بكميات سنة المقارنة:

ويعرف برقم (باش) وصيغته كما يلي

$$\text{الرقم القياسي للأسعار} = \frac{\text{مجـ } س_{١} ك_{١}}{\text{مجـ } س_{٠} ك_{١}} \times ١٠٠ \qquad (١٨-٢)$$

ويلاحظ ما يلي:

١ ــ لا يتأثر كلا الرقمين إذا ما تغيرت وحدة قياس الكمية، بخلاف الحال عند حساب الرقم القياسي البسيط للأسعار.

٢ ــ إن رقم لاسبير يكون واقعياً في حالة بقاء تشكيلة الكميات المستهلكة في سنة الأساس كما هي في سنة المقارنة، وذلك ليس محتمل بصفة عامة، حيث أن تغير الدخول والعادات، وظهور سلع جديدة، قد يغير من

تشكيلة السلع المستهلكة، ويعالج رقم باش هذه الحقيقة باستخدامه كميات سنة المقارنة في الترجيح.

٣ ـ رقم لاسبير يسهل تكوينه، حيث أنه يستخدم كميات سنة الأساس دائمًا في أي سنة من سنوات المقارنة، ! أما رقم باش فإنه يصعب تكوينه، حيث أنه يتطلب تحديد الكميات المستهلكة في كل سنة من سنوات المقارنة.

□ **مثال ١ :**

الآتي اسعار مجموعة من السلع في عامي ١٩٧٠، ١٩٨٠ أوجد الرقم القياسي للأسعار باستخدام صيغة لاسبير وباستخدام صيغة باش.

السلعة	الأسعار		الكميات	
	١٩٧٠ س_0	١٩٨٠ س_1	١٩٧٠ ك_0	١٩٨٠ ك_1
لبن	٢٠	٣٠	١٠٠	٢٥٠
دجاج	٥٠	٩٠	٦٠٠	٨٠٠
خبز	١٠	٢٠	٤٠٠	٣٠٠

□**الحل:**

السلعة	$\text{س}_1\text{ك}_0$	$\text{س}_0\text{ك}_0$	$\text{س}_1\text{ك}_1$	$\text{س}_0\text{ك}_1$
لبن	٣٠٠٠	٢٠٠٠	٧٥٠٠	٥٠٠٠
دجاج	٥٤٠٠٠	٣٠٠٠٠	٧٢٠٠٠	٤٠٠٠٠
خبز	٨٠٠٠	٤٠٠٠	٦٠٠٠	٣٠٠٠
	٦٥٠٠٠	٣٦٠٠٠	٨٥٥٠٠	٤٨٠٠٠

$$\text{الرقم القياسي (لاسبير)} = \frac{\text{مجـ س}_1\text{ك}_0}{\text{مجـ س}_0\text{ك}_0} \times ١٠٠ = \frac{٦٥٠٠٠}{٣٦٠٠٠} \times ١٠٠ = ١٨٠$$

$$\text{الرقم القياسي (باش)} = \frac{\text{مجـ س}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ س}_0\text{ك}_1} \times ١٠٠ = \frac{٨٥٥٠٠}{٤٨٠٠٠} \times ١٠٠ = ١٧٨$$

٢-٥-٤ القوة الشرائية Purchasing Power :

القوة الشرائية لوحدة النقد (جنيه مثلاً) تمثل قيمة الجنيه في سنة معينة بالمقارنة بسنة الأساس . ويستخدم لقياسها معكوس الرقم القياسي للأسعار. فالرقم القياسي للأسعار يمثل كمية النقود المطلوبة لشراء كمية ثابتة من السلع . ومعكوس هذا الرقم وهو القوة الشرائية يمثل كمية السلع التي يمكن شراؤها بمقدار ثابت من النقود وعلى ذلك فإن القوة الشرائية تكون منسوبة إلى فترة أساس الرقم القياسي للأسعار .

$$\text{القوة الشرائية لوحدة النقد} = \frac{١٠٠}{\text{الرقم القياسي للأسعار}} \qquad (٢-١٩)$$

تطبيـق ٢ :

إذا كان الرقم القياسي للأسعار في إحدى الدول عام ١٩٨٨ بالمقارنة بعام ١٩٧٠ هو ١٨٠ فما هي القوة الشرائية لوحدة النقد عام ١٩٨٨ .

$$\text{القوة الشرائية} = \frac{١٠٠}{١٨٠} = ٠,٥٥٥$$

٢-٥-٥ تعديل القيم Deflating Values :

إن وحدات النقد تتخذ أساساً لتقييم وتثمين الأشياء والأصول والخدمات والممتلكات. ومع ذلك فقيمة النقد في تناقص مستمر مع الزمن. وعلى ذلك فإن القيم تفقد معناها الحقيقي ويصعب تفسيرها. كيف نفسر السلاسل الزمنية للدخل والأجور والإنتاج والصادرات والواردات و... إلخ. كيف نفسر قيمة أصول إحدى الشركات وهي مشتراة على فترات زمنية مختلفة تختلف فيها القوة الشرائية للنقود .

التعديل Deflation عملية يتم من خلالها تحويل القيمة على أساس سعر العملة الجاري إلى قيمة أخرى على أساس سعر عملة معياري Standardized .

ويتم التعديل باستخدام الصيغة التالية :

القيمة المعدلة = القيمة الجارية × القوة الشرائية (٢-٢٠)

وتستخدم هذه المعادلة للتوصل إلى ما يسمي الدخل الحقيقي والأجر الحقيقي والقيم الحقيقية للأصول والممتلكات والقيم الحقيقية للقروض .

تطبيـق ٣ :

بفرض أن متوسط الأجور ارتفع من ٢٤٠ جنيه عام ١٩٦٠ إلى ٢٦٠ جنيه عام ١٩٧٠ بينما إرتفع الرقم القياسي للأسعار في السنوات نفسها من ١٨٢ إلى ٢٠٨ وضّح مدى التغير الحقيقي في مستوى الأجور .

متوسط الأجر الحقيقي عام ١٩٦٠ = ٢٤٠ × $\frac{١٠٠}{١٨٢}$ = ١٣٢ جنيه

متوسط الأجر الحقيقي عام ١٩٧٠ = ٢٦٠ × $\frac{١٠٠}{٢٠٨}$ = ١٢٥ جنيه

أي أن الأجور الحقيقية انخفضت من ١٣٢ إلى ١٢٥ جنيه .

تطبيـق ٤ :.

إذا علم أن مبيعات إحدى شركات المنسوجات ارتفعت من ٧٦ مليون جنيه عام ١٩٨٠ إلى ٨٢ مليون جنيه عام ١٩٨٧ - بينما ارتفع الرقم القياسي لأسعار المنسوجات في السنتان من ١٦٠ إلى ١٩٠ والمطلوب توضيح التغير الحادث في المبيعات .

المبيعات المعدلة عام ١٩٨٠ = ٧٦ × $\frac{١٠٠}{١٦٠}$ = ٤٧,٥ مليون جنيه

المبيعات المعدلة عام ١٩٨٧ = ٨٢ × $\frac{١٠٠}{١٩٠}$ = ٤٣,٢ مليون جنيه

أي أن المبيعات على أساس الأسعار الجارية، زادت بمقدار ٨٢-٧٦=٦ مليون جنيه، بينما أن الحقيقة كما تشير إليها القيم المعدلة توضح أن المبيعات قد نقصت بمقدار ٤٧,٥-٤,٢ مليون جنيه .

٢-٥-٦ تغيير أساس الرقم القياسي :

هناك حالات كثيرة تملي علينا تغيير فترة الأساس للرقم القياسي، ويمكن عرض أهمها فيما يلي :

(١) بمضي الوقت تصبح فترة الأساس بعيدة عن واقع المجتمع الذي نعيشه، وبالتالي يفضل اختيار فترة قريبة تتخذ كأساس .

(٢) عند مقارنة رقمان قياسيان أو أكثر، مثال ذلك مقارنة الرقم القياسي للأجور بالرقم القياسي للأسعار أو مقارنة الأسعار في عدد دول . مثل هذه المقارنات تستلزم توحيد فترة الأساس .

وبعد الاتفاق على فترة أساس جديدة ملائمة، نستخدم قيم الأساس المناظرة كمقام يتم على أساسه تحويل باقي القيم .

ويمكن استخدام الصيغة التالية :

$$\text{ق}' = \frac{\text{ق}}{\text{ق}_{0}} \times \text{١٠٠} \qquad (\text{٢-٢١})$$

حيث ق الرقم القياسي القديم .

$\text{ق}'$ الرقم القياسي الجديد .

ق_{0} الرقم القياسي لفترة الأساس .

تطبيق ٥ :

البيان الموضح أدناه يعرض الأرقام القياسية للأجور والمطلوب تعديل هذه الأرقام باعتبار عام ١٩٨٠ أساس

السنــة	١٩٧٨	١٩٧٩	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢
رقم باش	١٠٠	١١٠	١٣٠	١٤٥	١٦٠

الحـــل :

السنة	رقم باش ١٩٧٨=١٠٠	رقم باش ١٩٨٠=١٠٠
١٩٧٨	١٠٠	٧٧
١٩٧٩	١١٠	٨٥
١٩٨٠	١٣٠	١٠٠
١٩٨١	١٤٥	١١٢
١٩٨٢	١٦٠	١٢٣

$$\frac{١٠٠}{١٣٠} \times ١٠٠ = ٧٧$$

تطبيقات الفصل ٢-٥

□ **تطبيق ٦ :**

البيان التالي يمثل فئات العاملين بأحد المجتمعات وأجورهم في الساعة.
والمطلوب حساب الرقم القياسي للأجور لعام ١٩٨٠ بالمقارنة بعام ١٩٧٥ – وذلك باستخدام صيغة لاسبير– صيغة باش.

فئات العاملين	عدد العاملين		الأجر	
	١٩٧٥	١٩٨٠	١٩٧٥	١٩٨٠
أ	٢٥	٣٠	٥٠	٦٠
ب	١٠٠	١٢٠	٣٠	٤٠
ج	٧٠٠	٨٥٠	١٠	١٥
د	١٥٠٠	٢٠٠٠	٥	١٠

□ **الحل:**

فئات العاملين	ك.	ك١	س.	س١	س١ك.	س.ك.	س١ك١	س.ك١
أ	٢٥	٣٠	٥٠	٦٠	١٥٠٠	١٢٥٠	١٨٠٠	١٥٠٠
ب	١٠٠	١٢٠	٣٠	٤٠	٤٠٠٠	٣٠٠٠	٤٨٠٠	٣٦٠٠
ج	٧٠٠	٨٥٠	١٠	١٥	١٠٥٠٠	٧٠٠٠	١٢٧٥٠	٨٥٠٠
د	١٥٠٠	٢٠٠٠	٥	١٠	١٥٠٠٠	٧٥٠٠	٢٠٠٠٠	١٠٠٠٠
					٣١٠٠٠	١٨٧٥٠	٣٩٣٥٠	٢٣٦٠٠

$$\text{الرقم القياسي (لاسبير)} = \frac{\text{مجـ س}_1\text{ك.}}{\text{مجـ س.ك.}} \times ١٠٠ = \frac{٣١٠٠٠}{١٨٧٥٠} \times ١٠٠ = ١٦٥,٣$$

$$\text{الرقم القياسي (باش)} = \frac{\text{مجـ س}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ س.ك}_1} \times ١٠٠ = \frac{٣٩٣٥٠}{٢٣٦٠٠} \times ١٠٠ = ١٦٦,٧$$

٧ - البيان التالي يوضح اسعار المواد المستخدمة في صناعة احد المركبات والمطلوب حساب الرقم القياسي للأسعار لعام ١٩٨٠ باعتبار ١٩٧٠ = ١٠٠ وذلك باستخدام صيغة لاسبير - صيغة باش.

المواد المستخدمة	السعر		الكمية	
	١٩٧٠	١٩٨٠	١٩٧٠	١٩٨٠
أ	٣٠	٤٠	٢٠	٣٠
ب	١٠	٣٠	١٠	٢٠
ج	٥	١٠	٧٠	٨٠
د	٨	٢٠	٨٠	١٠٠

□ الحل:

رقم لاسبير ٢٠١ ورقم باش ٢٠٠

٨ - المعلومات الموضحة بالجدول التالي تتعلق بالأسرة النموذجية في أحد المجتمعات والمطلوب إعداد الأرقام القياسية للأسعار لعام ١٩٨٠ بالمقارنة بعام ١٩٧٠ وذلك باستخدام صيغة لاسبير وباش.

الأصناف	الأسعار		الاستهلاك بالشهر	
	١٩٧٠	١٩٨٠	١٩٧٠	١٩٨٠
خبز	٢٥	٤٠	٣	٢
لبن	٢٠	٣٠	١٠	٨
لحم	٧٥	١٢٥	٣	٤
بيض	١٥	٢٠	٤	٣
خضراوات	٥٠	٧٠	٣	٥
أخرى	١٥	٢٠	١	٢

□ **الحل:**

رقم لاسبير ١٥٢,٤ - رقم باش ١٥٢,١

□ □ □



٢ – ٦

مقاييس الموضـع

Measures of Position

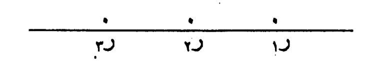
الربيعـات
العشـيرات
المئينـات

٢ – ٦
مقاييس الموضـع
Measures of Position

رأينا أن الوسيط يعد من مقاييس النزعة المركزية فهو يفيد في تقديم قيمة متوسطة أو مركزية للتوزيع. ويقدم لنا الوسيط معلومة أخرى هامة فهو يقسم القيم إلى مجموعتين متساويتين من حيث العدد، فإذا كنا بصدد دراسة دخل الفرد في مجتمع معين، وكان الوسيط هو ألف دولار فإن ذلك يعني أن نصف المجتمع دخله أقل من ألف ونصفه الآخر أكبر من ألف. وهناك على أي حال مقاييس أخرى تفيد في نفس الغرض، وتسمى مقاييس الموضع Position أو المجزءآت Quantiles ويمكن تعريفها بأنها عبارة عن مجموعة من القيم تجزيء التكرار الكلي بنسب معينة .

٢-٦-١ الربيعات :Quartile :

وهناك أيضاً الربيعات، وهي ثلاثة قيم تجزيء التكرار الكلي إلى أربعة أجزاء، وهذه الربيعات الثلاث تسمى الربيع الأول والثاني والثالث، فإذا رمزنا إليها بالرموز ر$_١$ ، ر$_٢$ ، ر$_٣$ ورتبنا القيم ترتيباً تصاعدياً فإنها تبدو كما يلي :



أي أن :

ر$_١$: الربيع الأول (الأدنى) وهو القيمة التي يسبقها ربع القيم الأصغر منها

ر$_٢$: الربيع الثاني وهو القيمة التي يسبقها $\frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ القيم الأصغر منها

ر$_١$: الربيع الثالث (الأعلى) وهو القيمة التي يسبقها $\frac{٣}{٤}$ القيم الأصغر منها .

ويلاحظ أن $ر_{٢}$ هو الوسيط. ولذا نجد أن طريقة حساب الربيع هي نفس طريقة حساب الوسيط، ويمكن عرضها كما يلي :

(١) ترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً .

(٢) إيجاد ترتيب أو رتبة الربيع كما يلي :

ترتيب الربيع

الربيع / البيانات	الأول	الثاني	الثالث
مبوبـــة	$\frac{١}{٤}$ ن	$\frac{١}{٢}$ ن	$\frac{٣}{٤}$ ن
غير مبوبة	$\frac{١}{٤}$ (ن+١)	$\frac{١}{٢}$ (ن+١)	$\frac{٣}{٤}$ (ن+١)

(٣) إيجاد قيم الربيع :

$$ر = ب + \frac{ت - ك.ص.س}{ك} \times ل \qquad (٢-٢٢)$$

وهذه الصيغة مماثلة تماماً لصيغة إيجاد قيمة الوسيط ويمكن اعتبار هذه الصيغة عامة لإيجاد الربيع (الأول - الثاني - الثالث) حيث :

ر : الربيع ، وهنا يجب وضع دليل لهذا الرمز ، أحد الأرقام ١، ٢، ٣ .

ت : ترتيب الربيع ...

ك.ص.س : التكرار الصاعد السابق لفئة الربيع

ك : تكرار فئة الربيع

ل : طول فئة الربيع

تطبيـق ١ :

أوجد الربيع الأول والثاني والثالث لمجموعة القيم التالية :

١٣، ٩، ١٨، ٦، ٢٧، ٣٥، ٢٢

□ الحـــل (١) ترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً :

٦، ٩، ١٣، ١٨، ٢٢، ٢٧، ٣٥

(٢) ترتيب الربيع الأول : $\frac{١}{٤}$ (٧+١) = ٢

ترتيب الربيع الثاني : $\frac{٢}{٤}$ (٧+١) = ٤

ترتيب الربيع الثالث $\frac{٣}{٤}$ (٧+١) = ٦

(٣) قيمة الربيعات : $ر_١$ = ٩ ، $ر_٢$ = ١٨ ، $ر_٣$ = ٢٧

تطبيـق ٢ :

أوجد الربيعات الثلاثة في التطبيق السابق في حالة إضافة القيمة ٣٩ .

□ **الحـل :** ترتيب القيم : ٦، ٩، ١٣، ١٨، ٢٢، ٢٧، ٣٥، ٣٩

ترتيب $ر_١$ = $\frac{١}{٤}$ (٨+١) = $\frac{٩}{٤}$ = ٢ $\frac{١}{٤}$

ترتيب $ر_٢$ = $\frac{٢}{٤}$ (٨+١) = $\frac{١٨}{٤}$ = ٤ $\frac{١}{٢}$

ترتيب $ر_٣$ = $\frac{٣}{٤}$ (٨+١) = $\frac{٢٧}{٤}$ = ٦ $\frac{٣}{٤}$

$ر_١$ = القيمة التي تقع في الترتيب الثاني مضافاً إليها $\frac{١}{٤}$ الفرق بين هذه القيمة والتي تليها .

$ر_١$ = ٩+ $\frac{١}{٤}$ (١٣-٩) = ١٠

$ر_٢$ = ١٨+ $\frac{١}{٢}$ (٢٢-١٨) = ٢٠

$ر_٣$ = ٢٧+ $\frac{٣}{٤}$ (٣٥-٢٧) = ٣٣

تطبيـق ٣ :

أوجد الربيع الأول والثالث في التطبيق الخاص بدرجات الطلبة (جدول ٢ بالقسم ٢-١-١) .

□ **الحـل : أنظر التطبيق ٢ بالفصل ٢-٧ .**

إيجاد الربيع بالرسم :

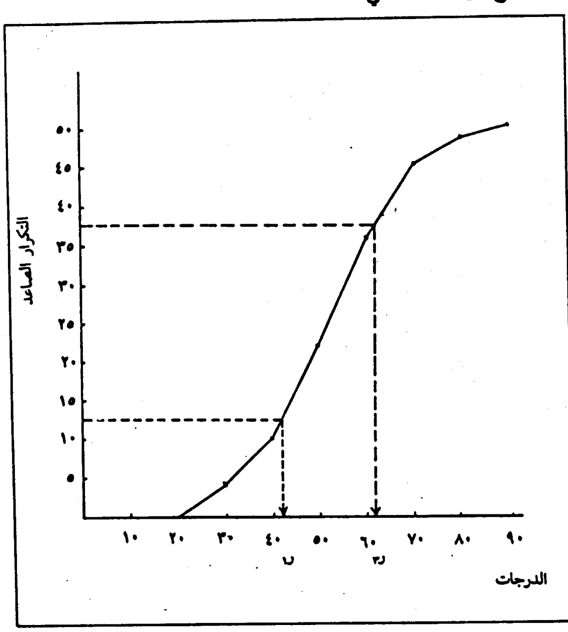
يمكن إيجاد قيم $ر_1$ ، $ر_3$ من الرسم باستخدام المضلع التكراري المتجمع الصاعد بأسلوب مشابه تماماً لحساب الوسيط. وفي هذه الحالة تكون قيمة $ر_1$ ، $ر_3$ هي القيم المناظرة للتكرار الصاعد $\frac{1}{4}$ ن ، $\frac{3}{4}$ ن على الترتيب .

تطبيـق ٤ :

أوجد الربيع الأدنى والربيع الأعلى في التطبيق الخاص بدرجات الطلبة :

☐ **الحــل** : من الشكل التالي يمكن القول أن $ر_1$ = ٤٣ ، $ر_3$ = ٦٢ وهي القيم المناظرة للتكرارات ١٢,٥ ، ٣٧,٥ .

$ر_1$ ، $ر_3$ هي القيم المناظرة للتكرار الصاعد ١٢,٥ ، ٣٧,٥ على الترتيب، كما يتضح من الشكل التالي :



٢-٦-٢ العشـيرات Deciles :

وبنفس المفهوم فإن العشيرات، وعددها تسعة تجزيء التوزيع التكراري إلى عشرة أجزاء .

٢-٦-٣ المئينات Percentiles :

وبنفس المفهوم فإن المئينات، وعددها ٩٩ تجزيء التوزيع التكراري إلى مائة جزيء .

وهناك علاقة بين هذه المجزءآت، يمكن عرضها في البيان التالي، فمثلاً :

$و = ر_{٢} = ع_{٥} = م_{٥٠}$

الوسيط	الربيعات	العشيرات	المئينات
			$م_{١}$
			⋮
		$ع_{١}$	$م_{١٠}$
		$ع_{٢}$	$م_{٢٠}$
	$ر_{١}$		$م_{٢٥}$
		$ع_{٣}$	$م_{٣٠}$
		$ع_{٤}$	$م_{٤٠}$
و	$ر_{٢}$	$ع_{٥}$	$م_{٥٠}$
		$ع_{٦}$	$م_{٦٠}$
		$ع_{٧}$	$م_{٧٠}$
	$ر_{٣}$		$م_{٧٥}$
		$ع_{٨}$	$م_{٨٠}$
		$ع_{٩}$	$م_{٩٠}$
			$م_{٩٩}$

ويمكن عرض الصيغة التالية لإيجاد قيمة المجزيء بصفة عامة

$$\text{جـ} = \text{ب} + \frac{\text{ت} - \text{ك.ص.س}}{\text{ك}} \times \text{ل} \qquad (\text{٢-٢٣})$$

حيث : جـ : المجزيء (وقد يكون الوسيط – الربيع – العشير -- المئين)

ب : بداية فئة المجزيء

ت : ترتيب المجزيء

ك.ص.س : التكرار الصاعد السابق لفئة المجزيء

ك : التكرار الأصلي لفئة المجزيء

ل : طول فئة المجزيء

تطبيقات الفصل ٢-٦

تطبيــق ٥ :

في مثالنا الخاص بدرجات الطلاب : أوجد

(أ) العشير الرابع

(ب) العشير الثامن

(جـ) المئين ٣٥

(د) المئين ٨٥

□ الحــل :

(أ) ترتيب العشير الرابع = $\frac{٢}{١٠}$ ن = $\frac{٤}{١٠}$ (٥٠) = ٢٠

إذن فئة العشير الثاني ٤٠-٥٠

وبالرجوع للتوزيع التكراري المتجمع الصاعد :

$$\text{ر}_{٣} = ٤٠ + \frac{٢٠-١٠}{١٢} \times ١٠ = ٤٨,٣$$

(ب) ترتيب $\text{ع}_{٨}$ = $\frac{٨}{١٠}$ ن = $\frac{٨}{١٠}$ (٥٠) = ٤٠

$$\text{ع}_{٨} = ٦٠ + \frac{٤٠ - ٣٦}{٩} \times ١٠ = ٦٤,٤$$

(جـ) ترتيب المئين ٣٥ = $\frac{٣٥}{١٠٠}$ ن = $\frac{٣٥}{١٠٠}$ (٥٠) = ١٧,٥

$$م_{٣٥} = ٤٠ + \frac{١٧,٥-١٠}{١٢} \times ١٠ = ٤٦,٢٥$$

(د) ترتيب $م_{٨٥}$ = $\frac{٨٥}{١٠٠}$ (٥٠) = ٤٢,٥

$$م_{٨٥} = ٦٠ + \frac{٤٢,٥-٣٦}{٩} \times ١٠ = ٦٧,٢٢$$

تطبيــق ٦ :

التوزيع التكراري التالي يعرض درجات الطلبة الناجحين في الثانوية العامة. فإذا كانت الجامعات تقبل ٣٥٪ فقط منهم ، أوجد الحد الأدنى للقبول بالجامعة.

الدرجـــة	٥٠-٦٠	٦٠-٧٠	٧٠-٨٠	٨٠-٩٠	٩٠-١٠٠
عدد الطلاب (ألف)	٢١٦	٩٨	٣٧	٢٢	٥

☐ **الحــل :** المطلوب $م_{٦٥}$ (نسبة غير المقبولين ١٠٠-٣٥)

نعد التوزيع المتجمع الصاعد

الدرجـــة	٥٠-٦٠	٦٠-٧٠	٧٠-٨٠	٨٠-٩٠	٩٠-١٠٠
التوزيع الصاعد	٢١٦	٣١٤	٣٥١	٣٧٣	٣٧٨

ترتيب $م_{٦٥}$ = $\frac{٦٥}{١٠٠}$ (٣٧٨) = ٢٤٥,٧

$$م_{٦٥} = ٦٠ + \frac{٢٤٥,٧-٢١٦}{٩٨} \times ١٠ =$$

$$= ٦٠ + ٣,٠٣ = ٦٣,٠٣$$

٧ - التوزيع التكراري الموضح أدناه يمثل توزيع السكان حسب فئات العمر ، والمطلوب :

- إيجاد الوسيط
- إيجاد الربيع الأول والربيع الثالث

العمــــر	٠-٢٠	٢٠-٤٠	٤٠-٦٠	٦٠-٨٠	٨٠-١٠٠
التكــرار	٣٥	٢٥	٢٠	١٥	٥

□ الحـــل :

العمــر	التكـرار	الصــاعد
٠-٢٠	٣٥	٣٥
٢٠-٤٠	٢٥	٦٠
٤٠-٦٠	٢٠	٨٠
٦٠-٨٠	١٥	٩٥
٨٠-١٠٠	٥	١٠٠

الترتيب : الوسيط = $\frac{١}{٢}$ (١٠٠) = ٥٠

ر ١ = $\frac{١}{٤}$ (١٠٠) = ٢٥

ر ٣ = $\frac{٣}{٤}$ (١٠٠) = ٧٥

$$و = ٢٠ + \frac{٥٠ - ٣٥}{٢٥} \times ٢٠ = ٣٢$$

$$ر_{١} = ٠ + \frac{٢٥ - ٠}{٣٥} \times ٢٠ = ١٤,٣$$

$$ر_{٣} = ٤٠ + \frac{٧٥ - ٦٠}{٢٠} \times ٢٠ = ٥٥$$



٢ – ٧

مقاييس التشتت
Measures of Variation

٢ - ٧
مقاييس التشتت
Measures of Variation

٢-٧-١ الأهميــة :

في الفصل ٢-٣ تم عرض أحد المقاييس الهامة في وصف وتحليل البيانات أو التوزيعات التكرارية، وهي مقاييس النزعة المركزية أو المتوسطات. غير أن هذه المقاييس لا تكفي وحدها لتحقيق هذا الغرض أو لإجراء المقارنات بين التوزيعات التكرارية المختلفة ولتوضيح ذلك نعرض الدرجات التالية وهي لثلاث مجموعات من الطلبة.

المجموعة س: ٤٠، ٤٠، ٤٠، ٤٠، ٤٠، ٤٠، ٤٠

المجموعة ص: ٣٠، ٣٥، ٤٠، ٤٠، ٤٥، ٥٠

المجموعة د: ١٠، ٢٠، ٢٠، ٣٠، ٧٠، ٩٠

ولمقارنة هذه الثلاث مجموعات فإننا نقوم بإيجاد متوسط كل مجموعة. ويلاحظ أن الثلاث مجموعات لها نفس المتوسط الحسابي وهو ٤٠، ولكننا نلاحظ أيضاً أن هناك شيء من الاختلاف بين هذه المجموعات. فالمجموعة الأولى مفرداتها متساوية أي أن مجموعة الطلاب متجانسة تماماً وعلى نفس المستوى. أما المجموعة الثانية فنلاحظ أن هناك اختلافاً (تبايناً ـ تشتتاً) بين الدرجات. وفي المجموعة الثالثة نجد أيضاً اختلافاً أو تشتتاً بين الدرجات، ولكن بدرجة أكبر.

هذه الخاصية (التشتت) لا تفصح عنها مقاييس النزعة المركزية، ويستخدم لهذا الغرض مقاييس أخرى يطلق عليها مقاييس التشتت نعرض منها:

(أ) المدى.
(ب) الانحراف الربيعي.
(ج) الانحراف المتوسط.
(د) التباين، والانحراف المعياري.
(هـ) معامل الاختلاف.

وهذه المقاييس كلها يتم استخدامها في حالة البيانات الرقمية. وبالنسبة للبيانات الغير رقمية أي الكيفية، فإن هناك عدد من مقاييس التشتت يمكن استخدامها نعرض منها دليل الاختلاف الكيفي (Index of qualitative variation (IQV)).

٢-٧-٢ المتغيرات الكمية :

المدى: (The Range)

يعرف المدى لمجموعة من القيم بأنه الفرق بين اكبر قيمة وأصغر قيمة، فالمدى للمجموعة:

٧، ٦، ٩، ٤، ٨، ٦

هو ٩ - ٤ = ٥

وفي البيانات المبوبة في جدول تكراري، يعرف المدى بأنه الفرق بين الحد الأعلى للفئة العليا وبين الحد الأدنى للفئة الدنيا.

فإذا نظرنا إلى التوزيع التكراري لدرجات الطلبة الموضح بالجدول رقم (٢) نجد أن المدى = ٩٠ - ٢٠ = ٧٠ درجة.

ويمتاز المدى بسهولة حسابه ووضوح فكرته وهو يستخدم كثيراً في مراقبة جودة الإنتاج وفي وصف الأحوال الجوية.

ومن عيوب المدى أنه لا يعتمد في حسابه على كل القيم، بل يحسب من واقع قيمتين فقط اكبر قيمة وأصغر قيمة، وهو لذلك يتأثر كثيراً بالقيم المتطرفة.

الانحراف الربيعي : (Quartile deviation) :

الإنحراف الربيعي هو أحد مقاييس التشتت ، والتي يتم حسابه بعد استبعاد بعض القيم المتطرفة أو الشاذة . وبالتحديد فهو يستبعد ربع القيم الصغيرة من ناحية وربع القيم الكبيرة من ناحية أخرى . فإذا كان لدينا مجموعة من القيم وقمنا بتقسيمها إلى أربع أقسام فإنه يمكن تصورها كما يلي :

ر١   ر٢   ر٣

ويلاحظ أن نقاط التقسيم الثلاث وهي ر١ ، ر٢ ، ر٣ أدت إلى تقسيم مجموعة القيـم إلى أربع أقسام متساوية . ويطلق على هذه القيم على الترتيب الربيع الأول والربيع الثاني والربيع الثالث .

ويعرف الانحراف الربيعي بأنه يساوي نصف المدى بين الربيع الثالث والربيع الأول . أي أن :

$$\text{(ح) الانحراف الربيعي} = \frac{ر٣ - ر١}{٢} \qquad (٢-٢٤)$$

ويتم حساب الربيع الأول والربيع الثالث بأسلوب مشابه لحساب الوسيط تماماً. (الربيع الثاني). فإذا كان لدينا مجموعة من القيم عددها ن فإن :

ترتيب الربيع الأول = $\frac{١}{٤}$ (ن + ١)

ترتيب الربيع الثالث = $\frac{٣}{٤}$ (ن + ١)

□ **مثال ١ :**

أوجد الانحراف الربيعي لمجموعة القيم التالية:

٩٦، ٨٨، ٨٠، ٢٤، ٢٨، ٣٢، ٤٠، ٤٨، ٥٦، ٧٦، ٦٨

□ **الحل:**

نقوم أولاً بترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً:

٢٤، ٢٨، ٣٢، ٤٠، ٤٨، ٥٦، ٦٨، ٧٦، ٨٠، ٨٨، ٩٦

ترتيب الربيع الأول = $\frac{١}{٤}$ (١١ + ١) = ٣

∴ الربيع الأول ($ر_١$) = ٣٢

ترتيب الربيع الثالث = $\frac{٣}{٤}$ (١١ + ١) = ٩

∴ الربيع الثالث ($ر_٣$) = ٨٠

الانحراف الربيعي = $\frac{ر_٣ - ر_١}{٢}$.

$= \frac{٨٠ - ٣٢}{٢} = ٢٤$

البيانات المبوبة:

يتم حساب قيمة الربيع الأول والثالث بأسلوب مشابه لحساب الوسيط (الربيع الثاني).

ترتيب الربيع لأول = $\frac{١}{٤}$ن

ترتيب الربيع الثالث = $\frac{٣}{٤}$ن

قيم الربيع = بداية فئة الربيع + (ترتيب الربيع − التكرار الصاعد السابق لفئة الربيع) ÷ (التكرار الأصلي لفئة الربيع) × طول فئة الربيع

□ مثال ٢ :

أوجد الانحراف الربيعي للتوزيع التكراري لدرجات الطلاب الموضح بالجدول رقم (٢):

□ الحل:

ترتيب الربيع الأول (ر١) = ¼ن = ¼(٥٠) = ١٢,٥

ترتيب الربيع الثالث (ر٣) = ¾ن = ¾(٥٠) = ٣٧,٥

ر١ = ٤٠ + (١٢,٥ − ١٠) ÷ ١٢ × ١٠ = ٤٠ + ٢,١ = ٤٢,١

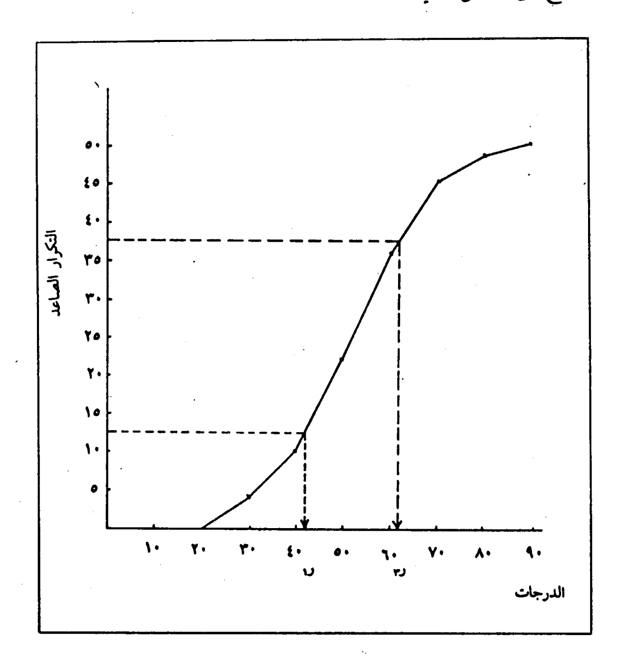
ر٣ = ٦٠ + (٣٧,٥ − ٣٦) ÷ ٩ × ١٠ = ٦٠ + ١,٧ = ٦١,٧

الانحراف الربيعي = ½ (٦١,٧ − ٤٢,١) = ٩,٨

الدرجات	التكرار	التكرار الصاعد
٢٠ ـ ٣٠	٤	٤
٣٠ ـ ٤٠	٦	١٠
٤٠ ـ ٥٠	١٢	٢٢
٥٠ ـ ٦٠	١٤	٣٦
٦٠ ـ ٧٠	٩	٤٥
٧٠ ـ ٨٠	٣	٤٨
٨٠ ـ ٩٠	٢	٥٠

هذا ويمكن حساب قيمة ر١، ر٣ من الرسم باستخدام المضلع التكراري المتجمع الصاعد، بأسلوب مشابه تماماً لحساب الوسيط بالرسم. وتكون قيم

ر١، ر٣ هي القيم المناظرة للتكرار الصاعد ١٢,٥، ٣٧,٥ على الترتيب، كما يتضح من الشكل التالي:



□ **مثال ٣ :**

أوجد الانحراف الربيعي للتوزيع التكراري التالي:

الفئات	التكرار	التكرار الصاعد
٤ –	٦	٦
٨ –	١٠	١٦
١٢ –	١٨	٣٤
١٦ –	٣٠	٦٤
٢٠ –	١٥	٧٩
٢٤ –	١٢	٩١
٢٨ –	١٠	١٠١
٣٢ –	٦	١٠٧
٣٦ – ٤٠	٢	١٠٩

ترتيب الربيع الأول = $\frac{1}{4}$ن = $\frac{1}{4}$(١٠٩) = ٢٧,٢٥

ترتيب الربيع الثالث = $\frac{3}{4}$ن = $\frac{3}{4}$ (١٠٩) = ٨١,٧٥

$$\text{ر}_1 = ١٢ + \frac{٢٧,٢٥ - ١٦}{١٨} \times ٤ = ١٤,٥$$

$$\text{ر}_3 = ٢٤ + \frac{٨١,٧٥ - ٧٩}{١٢} \times ٤ = ٢٤,٩$$

$$\text{الانحراف الربيعي} = \frac{\text{ر}_3 - \text{ر}_1}{٢}$$

$$= \frac{٢٤,٩ - ١٤,٥}{٢} = ٥,٢١$$

الانحراف المتوسط: (Mean absolute deviations)

تقوم فكرة الانحراف المتوسط على أساس استخدام متوسط انحرافات القيم عن وسطها الحسابي. ويفرض أن لدينا مجموعة القيم التالية للمتغير س

٦، ٧، ٤، ٥، ٨

فإن متوسطها الحسابي $\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{٣٠}{٥} = ٦$

وتكون انحرافات القيم عن وسطها الحسابي، أي (س − $\bar{س}$) كما يلي:

صفر، ١، −٢، −١، ٢

ويلاحظ أن مجموع هذه الانحرافات يساوي صفراً، كما سبق أن أوضحنا عند ذكر خواص المتوسط الحسابي. والسبب في ذلك يرجع إلى أن بعض هذه الانحرافات موجب وبعضها سالب ويكون المجموع يساوي صفراً بصفة عامة. وبالتالي ذلك يتم إهمال الاشارات السالبة عند حساب الانحراف المتوسط، ويعبر عن ذلك كما يلي:

$$(ح)\ \text{الانحراف المتوسط} = \frac{مجـ |س - \bar{س}|}{ن} \qquad (٢-٢٥)$$

حيث $|س - \bar{س}|$ تعني القيمة الموجبة للانحرافات.

ولتطبيق ذلك على المثال اعلاه، نجد أن

الانحراف المتوسط $= \frac{١}{٥}$ (صفر + ١ + ٢ + ١ + ٢)

$= \frac{١}{٥}(٦) = ١,٢$

وتكون صيغة الانحراف المتوسط للبيانات المبوبة في جدول تكراري كما يلي:

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجـ ك } |س - \bar{س}|}{ن}$$

تطبيـق ٤ :

ولتطبيق ذلك على التوزيع التكراري لـدرجات الـطلاب والموضحة بالجدول رقم (٢) نكون الجدول التالي:

الدرجات	التكرار ك	مركز الفئة س	$|س - \bar{س}|$	ك$|س - \bar{س}|$
٢٠ ـ ٣٠	٤	٢٥	٢٧	١٠٨
٣٠ ـ ٤٠	٦	٣٥	١٧	١٠٢
٤٠ ـ ٥٠	١٢	٤٥	٧	٨٤
٥٠ ـ ٦٠	١٤	٥٥	٣	٤٢
٦٠ ـ ٧٠	٩	٦٥	١٣	١١٧
٧٠ ـ ٨٠	٣	٧٥	٢٣	٦٩
٨٠ ـ ٩٠	٢	٨٥	٣٣	٦٦
	٥٠			٥٨٨

يتم أولاً حساب المتوسط الحسابي $\bar{س}$. وقد سبق حسـابه ويسـاوي ٥٢ درجة.

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\text{مجـ ك } |س - س|}{ن}$$

$$= \frac{٥٨٨}{٥٠} = ١١,٧٦$$

التباين : (Variance)

الانحراف المعياري : (Standard Deviation)

يعرف التباين بأنه المتوسط الحسابي لمربعات إنحرافات القيم عن وسطها الحسابي، حيث يتم تربيع الانحرافات للتخلص من الاشارات السالبة. والانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين، ويعتبر التباين (والانحراف المعياري) أهم مقاييس التشتت وأكثرها تطبيقاً. ويستخدم الرمز σ (ويقرأ سجما) للتعبير عن الانحراف المعياري، وهو من الحروف اليونانية. وبالتالي فإن التباين باعتباره مربع الانحراف المعياري، يرمز له بالرمز σ^2.

فإذا كان لدينا القيم س١، س٢، . . . ، سن، فإن

$$\text{التباين } \sigma^2 = \frac{\text{مجـ } (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}} \qquad (٢-٢٦)$$

$$\sigma = \sqrt{\text{التباين}}$$

تطبيق ٥ :

فإذا كانت س = ٤، ٦، ٢، صفر، ٣، ٥، ٨ فإن س = $\frac{٢٨}{٧}$ = ٤

ويتم حساب التباين كما يلي:

س	(س - سَ)	(س - سَ)٢
٤	صفر	صفر
٦	٢	٤
٢	٢-	٤
صفر	٤-	١٦
٣	١-	١
٥	١	١
٨	٤	١٦
٢٨		٤٢

$$\text{التباين } \sigma^2 = \frac{١}{\text{ن}} \text{ مجـ } (\text{س} - \bar{\text{س}})^2 = \tfrac{١}{٧}(٤٢) = ٦$$

$$\text{الانحراف الميعاري } \sigma = \sqrt{٦} = ٢{,}٤٥$$

يلاحظ أن الصيغة المذكورة لحساب التباين وهي:

$$\sigma^2 = \frac{1}{ن} مجـ (س - \bar{س})^2$$

تتطلب حساب المتوسط الحسابي $\bar{س}$ أولاً، وهذا يتطلب جهداً حسابياً كما سبق أن أوضحنا. كما أن قيمة $\bar{س}$ قد تتضمن كسوراً وبالتالي الانحرافات $(س - \bar{س})$ ومربعاتها، وعليه فإن حساب قيمة σ^2 يتطلب الكثير من العمليات الحسابية المجهدة. ولذا يتم حساب σ^2 باستخدام صيغة أخرى أكثر سهولة. وهذه الصيغة تعتمد على المتساوية الآتية:

$$مجـ (س - \bar{س})^2 = مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}$$

وبالتالي فإن:

$$\sigma^2 = \frac{1}{ن} [مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}] \qquad (٢-٢٧)$$

□ **مثال ٦ :**

أوجد التباين والانحراف المعياري للمجموعة التالية:

٢، ٣، ١، ٧، ١٠، ٥، ٨

□ **الحل:**

سيكون باستخدام الصيغتين السابق عرضهما لبيان سهولة الصيغة الثانية

الحل باستخدام الصيغة الأولى

س	(س - س̄)	(س - س̄)^{2}
٢	٣,١٤٣-	٩,٨٧٨
٣	٢,١٤٣-	٤,٥٩٢
١	٤,١٤٣-	١٧,١٦٤
٧	١,٨٥٧	٣,٤٤٨
١٠	٤,٨٥٧	٢٣,٥٩٠
٥	٠,١٤٣-	٠,٠٢٠
٨	٢,٨٥٧	٨,١٦٢
٣٦		٦٦,٨٥٤

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{٣٦}}{\text{٧}} = \text{٥,١٣٤}$$

$$\sigma^{2} = \frac{\text{مجـ}(\text{س} - \bar{\text{س}})^{2}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{٦٦,٨٥٤}}{\text{٧}} = \text{٩,٥٥١}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^{2}} = \sqrt{\text{٩,٥٥١}} = \text{٣,٠٩٠}$$

الحل باستخدام الصيغة الثانية

س	س^{2}
٢	٤
٣	٩
١	١
٧	٤٩
١٠	١٠٠
٥	٢٥
٨	٦٤
٣٦	٢٥٢

$$\sigma^{2} = \frac{1}{\text{ن}}\left[\text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}}\right]$$

$$= \tfrac{1}{7}\left[\text{٢٥٢} - \frac{(\text{٣٦})^{2}}{\text{٧}}\right]$$

$$= \tfrac{1}{7}\left[\text{٢٥٢} - \text{١٨٥,١٤٣}\right]$$

$$= \text{٩,٥٥١}$$

□ **خواص التباين (الانحراف المعياري):**

(أ) إذا كانت س = د + أ حيث أ ثابت فإن (٢-٢٨)

$$\sigma^{2}_{\text{س}} = \sigma^{2}_{\text{د}}$$

ويعني ذلك أنه إذا ما تم تحويل المتغير س إلى متغير آخر د = س - أ فإن التباين للمتغير س يكون هو نفسه التباين للمتغير د، أي أن طرح قيمة ثابتة من قيم س لا يغير من قيمة التباين الناتج.

فإذا كانت س لها القيم ٥٠، ٤٠، ٣٠ فإنه يمكن حساب التباين إما مباشرة باستخدام المتغير س أو باستخدام متغير آخر د = س - أ (أ = ٣٠ مثلاً).

الحل مباشرة

س	(س - $\bar{س}$)	(س - $\bar{س}$)^2
٥٠	١٠	١٠٠
٤٠	صفر	صفر
٣٠	١٠-	١٠٠
١٢٠		٢٠٠

$\sigma^2_{س} = \frac{٢٠٠}{٣}$

الحل بعد طرح ٣٠ من كل قيمة

د = س - ٣٠	د - $\bar{د}$	(د - $\bar{د}$)^2
٢٠	١٠	١٠٠
١٠	صفر	صفر
صفر	١-	١٠٠
٣٠		٢٠٠

$\sigma^2_{س} = \sigma^2_{د} = \frac{٢٠٠}{٣}$

(ب) إذا كانت س = ل د حيث ل ثابت فإن: (٢-٢٩)

$$\sigma_{س}^{٢} = ل^{٢}\,\sigma^{٢}_{د}$$

(ج) إذا كانت س = ل د + أ حيث أ، ل ثوابت فإن: (٢-٣٠)

$$\sigma^{٢}_{س} = ل^{٢}\,\sigma^{٢}_{د}$$

وتفيدنا هذه الخاصية في إمكان تحويل المتغير س إلى متغير آخر د = $\frac{س - أ}{ل}$ لتسهيل إيجاد التباين. ففي المثال السابق إذا اعتبرنا أ = ٣٠، ل = ١٠ فإنه يمكن حساب التباين لقيم د بسهولة كما يلي:

د	(د - $\bar{د}$)^2
٢	١
١	صفر
صفر	١
	٠٢

$\sigma^{٢}_{د} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore\ \sigma^{٢}_{س} = ل^{٢}\,\sigma^{٢}_{د} = (١٠)^{٢}\,\frac{٢}{٣} = \frac{٢٠٠}{٣}$

البيانات المبوبة:

(أ) الطريقة المباشرة (المطولة):

يتم حساب التباين بنفس الصيغة السابقة مع أخذ التكرارات (ك) في الحسبان أي أن:

$$\sigma^2_{س} = \frac{1}{ن} [مجـ ك س^2 - \frac{(مجـ ك س)^2}{ن}] \qquad (٢-٣١)$$

تطبيـق ٧ :

فلإيجاد التباين للتوزيع التكراري لدرجات الطلاب نقوم بعمل الجدول التالي:

الدرجات	التكرار ك	مركز الفئة س	ك س	ك س²
٢٠ – ٣٠	٤	٢٥	١٠٠	٢٥٠٠
٣٠ – ٤٠	٦	٣٥	٢١٠	٧٣٥٠
٤٠ – ٥٠	١٢	٤٥	٥٤٠	٢٤٣٠٠
٥٠ – ٦٠	١٤	٥٥	٧٧٠	٤٢٣٥٠
٦٠ – ٧٠	٩	٦٥	٥٨٥	٣٨٠٢٥
٧٠ – ٨٠	٣	٧٥	٢٢٥	١٦٨٧٥
٨٠ – ٩٠	٢	٨٥	١٧٠	١٤٤٥٠
	٥٠		٢٦٠٠	١٤٥٨٥٠

$$\sigma^2_{س} = \frac{1}{٥٠} [١٤٥٨٥٠ - \frac{(٢٦٠٠)^2}{٥٠}]$$

$$= \frac{1}{٥٠} [١٤٥٨٥٠ - ١٣٥٢٠٠]$$

$$= \frac{1}{٥٠} [١٠٦٥٠] = ٢١٣$$

$$\sigma = \sqrt{٢١٣} = ١٤,٥٩٥$$

(ب) الطريقة المختصرة:

وفيها تستخدم الخاصية رقم (١) حيث يتم خصم قيمة معينة من المتغير س لنحصل على متغير آخر د = س − أ. ويفضل اختيار قيمة أ أحد مراكز الفئات التي تناظر اكبر تكرار، ففي هذا المثال يفضل اعتبار أ = ٥٥. ويكون الحل كما يلي:

الفئات	ك	س	د	ك د	ك د٢
٢٠ ـ ٣٠	٤	٢٥	−٣٠	−١٢٠	٣٦٠٠
٣٠ ـ ٤٠	٦	٣٥	−٢٠	−١٢٠	٢٤٠٠
٤٠ ـ ٥٠	١٢	٤٥	−١٠	−١٢٠	١٢٠٠
٥٠ ـ ٦٠	١٤	٥٥	صفر	صفر	صفر
٦٠ ـ ٧٠	٩	٦٥	١٠	٩٠	٩٠٠
٧٠ ـ ٨٠	٣	٧٥	٢٠	٦٠	١٢٠٠
٨٠ ـ ٩٠	٢	٨٥	٣٠	٦٠	١٨٠٠
	٥٠			−١٥٠	١١١٠٠

$$\sigma^{٢}_{س} = \frac{١}{ن} [مجـ ك د^{٢} - \frac{(مجـ ك د)^{٢}}{ن}]$$

$$= \frac{١}{٥٠} [١١١٠٠ - \frac{(-١٥٠)^{٢}}{٥٠}] = ٢١٣$$

(ج) الطريقة القصيرة:

ويتم فيها استخدام الخاصية رقم (٣) حيث يتم تحويل المتغير س إلى متغير آخر د = $\frac{س - أ}{ل}$. وكما سبق أن ذكرنا عند استخدامها في ايجاد المتوسط الحسابي، فإن هذه الطريقة يفضل استخدامها في حالة الفئات المنتظمة حيث تكون قيمة أ هي أحد مراكز الفئات، وقيمة ل هي طول الفئة. وبذلك نحصل على متغير د يسهل التعامل معه حيث يأخذ القيم:

...، −٣، −٢، −١، صفر، ١، ٢، ٣، ...

وتكون قيمة $\sigma^2_{س} = \sigma^2_{د} \times$ (طول الفئة)^2

وباعتبار أ = ٥٥، ل = طول الفئة = ١٠ يكون الحل كما يلي:

الفئات	ك	د	ك د	ك $د^2$
٢٠ ــ ٣٠	٤	٣-	١٢-	٣٦
٣٠ ــ ٤٠	٦	٢-	١٢-	٢٤
٤٠ ــ ٥٠	١٢	١-	١٢-	١٢
٥٠ ــ ٦٠	١٤	صفر	صفر	صفر
٦٠ ــ ٧٠	٩	١	٩	٩
٧٠ ــ ٨٠	٣	٢	٦	١٢
٨٠ ــ ٩٠	٢	٣	٦	١٨
	٥٠		١٥-	١١١

$$\sigma^2_{د} = \frac{1}{ن} [\text{مجـ ك } د^2 - \frac{(\text{مجـ ك د})^2}{ن}]$$

$$= \frac{1}{50} [111 - \frac{(-15)^2}{50}] = 2.13$$

$$\sigma^2_{س} = ل^2 \sigma^2_{د}$$

$$= (10)^2 (2.13) = 213$$

معامل الاختلاف:

(Coefficient of variation): (C.V.)

تعرضنا فيما سبق إلى مقاييس التشتت، وذكرنا أن أهم هذه المقاييس وأكثرها استخداماً هو الانحراف المعياري. غير أن معنوية مقدار الانحراف المعياري المستخرج لمتغير ما يعتمد على قيم هذا المتغير. ولتوضيح ذلك نفترض أننا بصدد قياس أوزان طلبة المرحلتين الابتدائية والثانوية، وكانت النتائج كما يلي:

	الانحراف المعياري	المتوسط الحسابي
طلبة المرحلة الابتدائية	١٠ كجم	٤٠ كجم
طلبة المرحلة الثانية	١٠ كجم	٧٠ كجم

فمعنوية المقدار ١٠ كانحراف معياري لطلبة المرحلة الابتدائية تزيد عن معنوية المقدار ١٠ كإنحراف معياري لطلبة المرحلة الثانوية. أي أننا لا نستطيع القول أن التشتت واحد في الحالتين حيث يختلف مقدار المتوسط الحسابي (أو قيم المتغير).

ولتخليص قيم الانحراف المعياري من أثر هذا الخلاف في قيم المتغير فإننا نقوم بنسبة مقدار الانحراف الميعاري إلى المتوسط، ويسمى ذلك المقياس الهام معامل الاختلاف، أي أن

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{المتوسط الحسابي}}$$

$$\text{م. أ} = \frac{\sigma}{\text{س}} \qquad (٢-٣٢)$$

وأحيانا يضرب الرقم في ١٠٠ لنحصل عليه كنسبة مئوية.

وبحساب معامل الاختلاف لأوزان الطلبة نجد أنه:

$$\text{في المرحلة الابتدائية} = \frac{١٠}{٤٠} = ٠,٢٥$$

$$\text{في المرحلة الثانوية} = \frac{١٠}{٧٠} = ٠,١٤$$

ومن ذلك يتضح أن التشتت فى الأوزان اكبر بين طلاب المرحلة الابتدائية.

ويمكن عن طريق معامل الاختلاف مقارنة التشتت بين الظواهر المختلفة، حيث تختلف وحدات القياس. وذلك لأن معامل الاختلاف يخلص قيم الظاهرة

من وحدة القياس. فإذا كنا بصدد قياس أوزان وأطوال طلاب المرحلة الابتدائية، وكانت النتائج كما يلي:

	الانحراف المعياري	المتوسط الحسابي
الأوزان	١٠ كجم	٤٠ كجم
الأطوال	١٤ سم	١٤٠ سم

فإننا لا نستطيع القول استناداً إلى الانحراف المعياري وحده بأن التشتت في الأطوال اكبر من التشتت في الأوزان، وذلك لاختلاف وحدات القياس (بالاضافة الى اختلاف المتوسطات) ويصبح من الضرورة استخدام معامل الاختلاف لأغراض المقارنة، كما يلي:

من الأوزان = $\frac{١٠}{٤٠}$ = ٠,٢٥

من الأطوال = $\frac{١٤}{١٤٠}$ = ٠,١

وعلى ذلك نستطيع القول بأن التشتت في الأوزان أكبر من التشتت في الأطوال.

□ مثال ٨ :

لغرض تقييم إحدى طرق التعليم الحديثة، أجري اختبار لمجموعتين من الطلاب، المجموعة الأولى، تم تعليمها حسب الطريقة التقليدية، والمجموعة الثانية تم تعليمها حسب الطريقة الحديثة. وكانت نتائج درجات الاختبار كما يلي، والمطلوب التعليق عليها.

	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري
المجموعة الأولى	٦٠	٨
المجموعة الثانية	٧٥	١٥

من الواضح أن الطريقة الحديثة أدت إلى زيادة القدرة على التحصيل العلمي، وبحساب معامل الاختلاف نجد أنه

في المجموعة الأولى = $\frac{٨}{٦٠}$ = ٠,١٣٣

في المجموعة الثانية = $\frac{١٥}{٧٥}$ = ٠,٢٠٠

أي أن الطريقة الحديثة رغم أنها أدت إلى زيادة القدرة على التحصيل فإنها أدت إلى زيادة التشتت في المستوى العلمي للطلاب.

٢-٧-٣ المتغيرات الكيفية :

دليل الاختلاف الكيفي:

(Index of Qualitative variation): (I.Q.V.)

المقاييس السابقة للتشتت يمكن استخدامها في حالة المتغيرات الرقمية فقط. أما إذا كنا بصدد قياس التشتت أو الاختلافات في المتغيرات الكيفية فإنه توجد مجموعة من المقاييس المعدة لهذا الغرض، نعرض ما نراه أهم هذه المقاييس وهو ما نطلق عليه دليل الاختلاف الكيفي (د.أ.) ويستخدم هذا المؤشر على سبيل المثال لقياس الاختلافات في الحالة الاجتماعية (متزوج – أعزب – أرمل – مطلق) والجنسية (مصري – سعودي – اميركي...)، نوع الجريمة (قتل – سرقة – رشوة –...)، الديانة (مسلم – مسيحي – يهودي)، الوظيفة (إداري – فني – كتابي...)... الخ.

كما يمكن استخدام هذا المؤشر لقياس التشتت للمتغيرات التي يمكن ترتيبها كما في حالة تقديرات الطلاب مثلاً على أساس (ممتاز – جيد – جيد جداً..) والحالة الاجتماعية والاقتصادية (ممتازة – متوسطة – ..)... الخ.

غير أنه في مثل هذه الحالات فإن هذا الدليل لا يأخذ الترتيب في الاعتبار.

ولتوضيح مفهوم هذا المقياس نفرض المجموعات الأربع التالية وكل منها يمثل مجموعة من ستة أشخاص مختلفي الجنسيات ــ ونود قياس الاختلاف أو التشتت بينهم من ناحية الجنسية.

	المجموعة الأولى	المجموعة الثانية	المجموعة الثالثة	المجموعة الرابعة
مصري	٦	٥	٣	٢
سعودي	٠	١	٢	٢
عراقي	٠	٠	١	٢
	٦	٦	٦	٦

من الواضح أن المجموعة الأولى تمثل حالة من التجانس التام أو عدم وجود تشتت من حيث الجنسية، حيث أن كل أفراد المجموعة من جنسية واحدة (مصري). وفي المجموعة الثانية بدأ يظهر شيء من الاختلاف يمكن قياسه رقمياً باعتبار وجود خمس حالات اختلاف حيث أن كل شخص مصري يختلف عن الشخص السعودي من حيث الجنسية. وفي المجموعة الثالثة بدأ التشتت يتزايد داخل المجموعة ويمكن قياسه بعد حالات الخلاف كما يلي:

ثلاثة مصريين يختلفون عن ثلاثة آخرين فيكون عدد حالات الخلاف ٣ × ٣ = ٩

كما يوجد شخصان سعوديان يختلفان عن العراقي أي عدد حالات الخلاف ٢ × ١ = ٢

ويكون مجموع حالات الخلاف في المجموعة الثالثة هي ١١ حالة

وفي المجموعة الرابعة زاد التشتت إلى أقصاه حيث تكون عدد حالات الخلاف كما يلي:

٢ مصري يختلفون عن ٤ من جنسيات اخرى (٢ × ٤ = ٨)
٢ سعودي يختلفون عن ٢ عراقي (٢ × ٢ = ٤)

وتكون عدد حالات الخلاف الكلية = ١٢

وبتلخيص ما سبق نجد أن عدد حالات الخلاف في المجموعات الأربع كما يلي:

صفر، ٥، ١١، ١٢

هذا هو ما يجري عند استخدام (د.أ.) غير أنه يتم القسمة دائمًا على عدد حالات الاختلاف القصوى، أي أن

$$\text{د.أ.} = \frac{\text{عدد الاختلافات الفعلية}}{\text{عدد الاختلافات القصوى}}$$

وعليه تصبح المقادير اعلاه كما يلي صفر، $\frac{٥}{٩}$، $\frac{١١}{١٢}$، ١ للمجموعات الأربع على التوالي.

وبذلك تنحصر قيمته دائمًا بين الصفر والواحد الصحيح.

ولعرض الصيغة العامة لحساب هذا المؤشر نفرض أن المتغير مصنف الى عدد من التصنيفات أو الفئات قدره م، وهي $\text{ك}_{١}$، $\text{ك}_{٢}$، . . .، $\text{ك}_{\text{م}}$. ومجموعها $\text{مجـ ك} = \text{ن}$.

عدد الاختلافات الفعلية (خ) = $\text{مجـ ك}_{\text{ر}}\,\text{ك}_{\text{ل}}$ حيث ر أصغر من ل

أي يتم جمع حاصل ضرب كل تكرار في الأخر دون تكرار

$$\text{عدد الاختلافات القصوى} = \tfrac{١}{٢}\,\text{م}\,(\text{م} - ١)\left(\frac{\text{ن}}{\text{م}}\right)^{٢}$$

ويمكن عرضها أيضاً على الصورة $\frac{\text{ن}^{٢}}{٢}\left(\frac{\text{م} - ١}{\text{م}}\right)$

وتكون الصيغة النهائية كما يلي:

$$\text{د.أ.} = \frac{٢\,\text{م}\,\text{خ}}{\text{ن}^{٢}\,(\text{م} - ١)} \qquad (٢\text{-}٣٣)$$

ويلاحظ أن (د.أ.) يمكن حسابه باستخدام التكرار الأصلي كما يمكن استخدام التكرار النسبي.

□ مثال ٩ :

التوزيع التكراري التالي يمثل الحالة الاجتماعية لمستخدمي احدى الشركات والمطلوب قياس التشتت بين المجموعة.

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	أرمل	مطلق
التكرار	٢٧	٩٨	١٢	٥

□ الحل:

خ = مجـ كر كن = ٢٧(٩٨+١٢+٥) + ٩٨ (١٢+٥) + ١٢(٥) = ٤٨٣١

$$\text{د.أ.} = \frac{\text{٢م مجـ كركن}}{\text{ن}^{٢}\ (\text{م} - ١)} = \frac{(٢)(٤)(٤٨٣١)}{(١٤٢)^{٢}\ (٤ - ١)} = ٠{,}٦٣٩$$

□ مثال ١٠ :

فيما يلي بيان بالنسب المئوية لتوزيع الأشخاص حسب الديانة في مدينتين والمطلوب بيان أيهما أكثر تشتتاً.

الديانة	مدينة (أ)	مدينة (ب)
مسلم	٨٥	٦٠
مسيحي	١٠	٣٠
يهودي	٥	١٠

□ الحل:

مدينة (أ) خ = مجـ كركن = ٨٥(١٥) + ١٠(٥) = ١٣٢٥

$$\text{د.أ.} = \frac{٢\text{م خ}}{\text{ن}^{٢}(٣ - ١)} = \frac{٢(٣)(١٣٢٥)}{(١٠٠)^{٢}(٢)} = ٠,٣٩٨$$

مدينة (ب): خ = مجـ كـ ركـ ن = ٦٠(٤٠) + ٣٠(١٠) = ٢٧٠٠

$$\text{د.أ.} = \frac{٢(٣)(٢٧٠٠)}{(١٠٠)^{٢}(٢)} = ٠,٨١٠$$

اي أن التشتت في المدينة ب أكبر منه في المدينة (أ).

تمارين الفصل ٢-٧

١١ – التوزيع التكراري التالي يمثل العدد اليومي للطلاب المترددين على إحدى المكتبات وذلك خلال فترة معينة والمطلوب إيجاد المدى والانحراف الربيعي والانحراف المعياري.

عدد المترددين في اليوم	٢٠ – ٤٠	٤٠ – ٦٠	٦٠ – ١٠٠	١٠٠ – ١٦٠	١٦٠ – ٢٠٠
التكرار	١٠	٥٠	٨٠	٤٠	٢٠

□ الحل:

المدى = ٢٠٠ – ٢٠ = ١٨٠

الربيع الأول = ٤٠ + $\frac{٥٠ - ١٠}{٥٠}$ × ٢٠ = ٥٦

الربيع الثالث = ١٠٠ + $\frac{١٥٠ - ١٤٠}{٤٠}$ × ٦٠ = ١١٥

الانحراف الربيعي = $\frac{١١٥ - ٥٦}{٢}$ = ٢٩,٥

التباين σ^2 = ١٧٥٠

الانحراف المعياري σ = $\sqrt{١٧٥٠}$ = ٤١,٨٣٣

١٢ ــ أوجد الانحراف الربيعي ومعامل الاختلاف للتوزيع التكراري التالي:

أعمار المستخدمين	٢٥ ــ	٣٠ ــ	٣٥ ــ	٤٠ ــ	٤٥ ــ	٥٠ ــ	٥٥ ــ ٦٠
العدد	٨	١٠	١٥	٧	٥	٣	٢

ترتيب ر١ = ¼(٥٠) = ١٢,٥ ترتيب ر٣ = ٣٧,٥

ر١ = ٣٠ + (١٢,٥ - ٨)/(١٠) (٥) = ٣٢,٢٥

ر٣ = ٤٠ + (٣٧,٥ - ٣٣)/(٧) (٥) = ٤٣,٢

الانحراف الربيعي = (٤٣,٢ - ٣٢,٢)/(٢) = ٥,٥

معامل الاختلاف = σ/سَ = (٧,٩٦)/(٣٨,٣) = ٠,٢٠٨

١٣ ــ البيان التالي يوضح عد الجرائم التي تمت في إحدى المدن خلال عام وتوزيعها حسب نوع الجريمة. أوجد دليل الاختلاف الكيفي.

نوع الجريمة	سطو	سرقة سيارات	سرقة	خطف	قتل
التكرار	٤٧	١٤	٤٨	٧	٥

□ الحل:

خ = مجـ كر كن = ٤٧(٧٤) + ١٤(٦٠) + ٤٨(١٢) + ٧(٥) = ٤٩٢٩

د.أ. = ((٤٩٢٩)(٥)٢)/((٤)٢(١٢١)) = ٠,٨٤٢

□ □ □

١٤ – القيم الموضحة أدناه تمثل أجور عينة من العمال (ألف ريال) في إحدى الصناعات .

والمطلوب :

إيجاد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري للعينة

٤، ٣، ٢، ٥، ١

☐ الحـــل :

س	$س^{٢}$
٤	١٦
٣	٩
٢	٤
٥	٢٥
١	١
١٥	٥٥

$$\bar{س} = \frac{١٥}{٥} = ٣$$

$$\sigma^{٢} = \frac{١}{٥} \left[٥٥ - \frac{(١٥)^{٢}}{٥} \right] = ٢$$

$$\sigma = \sqrt{٢} = ١,٤١٤$$

١٥ – الأرقام الموضحة أدناه تمثل عدد الأولاد في الأسرة وذلك في عينة من الأسر .

والمطلوب : إيجاد التباين .

٣، ٢، ٤، ١، ٥

☐ **الحـــل :**

س	$س^{٢}$
٣	٩
٢	٤
٤	١٦
١	١
٥	٢٥
١٥	٥٥

$$\sigma^{٢} = \frac{١}{٥}\left[٥٥ - \frac{(١٥)^{٢}}{٥}\right] = ٢$$

١٦ – المطلوب قياس التشتت بين الطبقات في المجتمع أدناه .

الطبقـــة	ممتــاز	جيــد	متوســط
عدد الأشخاص (ألف)	٢	١٠	٢٠

☐ **الحـــل :**

غ = ٢ (٢٠+١٠) + ١٠ (٢٠) = ٦٠+٢٠٠ = ٢٦٠

$$د.أ = \frac{٢\ (٢٦٠)\ (٣)}{(٢)\ ٣٢^{٢}} = ٠,٧٦٢$$

١٧ – التوزيع التكراري التالي يعرض مدة الإعارة الفعلية للكتاب في إحدى المكتبات العامة .

المطـلوب :

– إيجاد الربيع الأول والربيع الثالث .

– إيجاد الانحراف الربيعي .

مدة الإعارة (يوم)	١–٣	٣–٩	٩–٢١	٢١–٣١	٣١–٥٠
عدد المراجع ٪	١٠	٣٠	٥٠	٧	٣

□ **الحـــــل :**

مدة الإعارة	عدد المراجع ٪	التكرار الصاعد
١–٣	١٠	١٠
٣–٩	٣٠	٤٠
٩–٢١	٥٠	٩٠
٢١–٣١	٧	٩٧
٣١–٥٠	٣	١٠٠
	١٠٠	

ترتيب $ر_1$ = $\frac{1}{4}$ (١٠٠) = ٢٥

ترتيب $ر_3$ = $\frac{3}{4}$ (١٠٠) = ٧٥

$$ر_1 = ٣ + \frac{٢٥ - ١٠}{٣٠} \times ٦ = ٦$$

$$ر_3 = ٩ + \frac{٧٥ - ٤٠}{٥٠} \times ١٢ = ١٧,٤$$

$$ح = \frac{١٧,٤ - ٦}{٢} = ٥,٧$$

١٨ – البيان التالي يوضح توزيع السكان حسب فصيلة الدم .

والمطـلوب :

قياس التشتت باستخدام دليل الاختلاف الكيفي

فصيلة الدم	أ	ب	أ ب	و
عدد السكان ٪	٤٠	٢٠	١٠	٣٠

□ **الحـــل :**

خ = ٤٠ (٢٠+١٠+٣٠) + ٢٠ (١٠+٣٠) + ١٠ (٣٠) = ٣٥٠٠

$$د.أ = \frac{٢ (٣٥٠٠) (٤)}{(١٠٠)^٢ (٣)} = ٠,٩٣٣$$

١٩ - في دراسة لقياس درجة التخصص وتقسيم العمل في أحد المجتمعات تم تصنيف المهن كما هو موضح بالتوزيع التكراري التالي .

والمطـلوب :

قياس التشتت باستخدام دليل الاختلاف الكيفي

المهـــن	عمال عاديون	عمال مهرة	فنيـــون	أخـــرى
التكـــرار ٪	٥٠	٢٠	٢٠	١٠

□ **الحـــل :**

خ = ٥٠ (٢٠+٢٠+١٠) + ٢٠ (٣٠) + ٢٠ (١٠) = ٣٣٠٠

$$\text{د. أ} = \frac{\text{٢ (٣٣٠٠) (٤)}}{\text{(١٠٠)}^{\text{٢}}\text{ (٣)}} = \text{٠,٨٨}$$

٢٠ - البيان التالي يوضح رصيد المكتبة في إحدى المكتبات المتخصصة موزعاً حسب اللغة .

والمطـلوب :

قياس التشتت باستخدام دليل الاختلاف الكيفي

اللغـــة	عربي	انجليزي	فرنسي	ألمـاني
عدد الكتب ٪	٢٥	٥٠	١٥	١٠

□ **الحـــل :**

خ = ٢٥ (٧٥) + ٥٠ (٢٥) + ١٥ (١٠) = ٣٢٧٥

$$\text{د. أ} = \frac{\text{٢ خ م}}{\text{ن}^{\text{٢}}\text{(م-١)}} = \frac{\text{٢(٣٢٧٥) (٤)}}{\text{١٠٠}^{\text{٢}}\text{ (٣)}} = \text{٠,٨٧}$$

٢١ – المطلوب قياس التشتت (التنوع) في اللغة في المجموعة المكتبية التالية ، والتي تخص إحدى المكتبات .

لغة الكتاب	عربي	انجليزي	فرنسي	أخـــرى
عدد الكتب	٥٠	٣٠	١٠	١٠

□ **الحـــل :**

$$\text{خ} = ٥٠\ (٥٠) + ٣٠\ (٢٠) + ١٠\ (١٠) = ٣٢٠٠$$

$$\text{د. خ} = \frac{\text{٢ خ م}}{\text{ن}^{٢}\ (\text{م}-١)} = \frac{٢(٣٢٠٠)\ (٤)}{(١٠٠)^{٢}\ (٤-١)} = ٠,٨٥$$

٢ – ٨

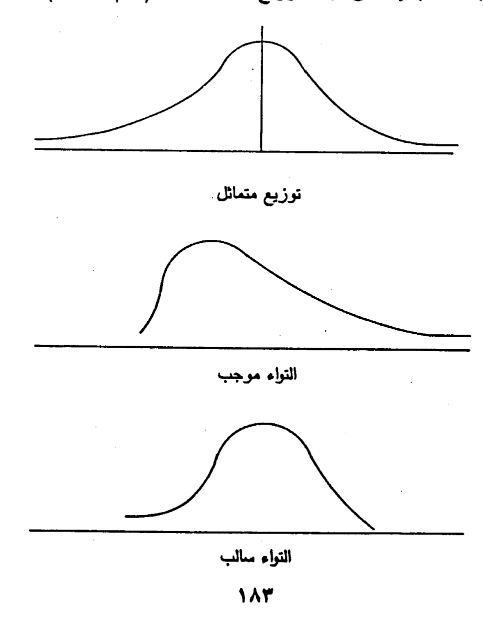
مقاييس الإلتواء

Measures of Skewness

٢ – ٨
مقاييس الإلتواء
Skewness

٢-٨-١ الأهميـة

إن معرفة المتوسط والتشتت لايكفيان لوصف التوزيعات التكرارية ومقارنتها. فقد يتساوى توزيعان في متوسطهما وفي درجة تشتتهما ، ومع ذلك يختلفان من حيث الإلتواء . والإلتواء هو بعد المنحنى عن التماثل، ويعرف الإلتواء بأنه موجب إذا كان ذيل التوزيع ناحية اليمين (القيم الكبيرة) ويعرف الإلتواء بأنه سالب إذا كان ذيل التوزيع ناحية اليسار (القيم الصغيرة) .



توزيع متماثل

التواء موجب

التواء سالب

والأشكال المعروضة تعطي وصفاً للمفاهيم التي تعرضنا لها ، فالتوزيع المتماثل Symmetric يعني أن القيم موزعة بتماثل حول قيمة معينة ، فإذا نظرنا إلى الخط في منتصف التوزيع نجده يقسم القيم إلى مجموعتين متماثلتين ويلاحظ أنه في التوزيعات المتماثلة يتساوى كل من المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال .

أما في حالة الإلتواء الموجب Positive فإن عدد أكبر من الحالات يكون أقل من المتوسط الحسابي ، وتقع على يساره ، كما أن القيم الشاذة أو المتطرفة (الكبيرة في هذه الحالة) تقع على يمينه . وفي حالة الإلتواء السالب Negative فإن ذلك يعني أن العدد الأكبر من الحالات يقع يمين المتوسط الحسابي ، والقيم المتطرفة على اليسار (الصغيرة في هذه الحالة) .

طرق قياس الإلتواء :

يمكن معرفة طبيعة الإلتواء عند رسم التوزيع على أن هناك طرق أكثر دقة وتمدنا برقم يعد مقياساً للإلتواء يمكن من الوصف والمقارنة ، ونعرض فيما يلي مجموعة من الطرق المستخدمة ، وكلها تشترط أن تكون المتغيرات كمية ، وتفسر النتائج فيها كما يلي :

إذا كان الرقم صفر ، فإن ذلك يعني أن التوزيع متماثل وإذا كانت قيمته موجبة فإن ذلك يعني أن الإلتواء موجب ، وإذا كانت القيمة سالبة فإن ذلك يعني أن الإلتواء سالب .

٢-٨-٢ معامل التواء بيرسون الأول K. Pearson :

$$\text{ل}_1 = \frac{\bar{\text{س}} - \text{مـ}}{\sigma} \qquad (٢-٣٤)$$

حيث $\bar{\text{س}}$ المتوسط الحسابي

مـ المنوال

σ الانحراف المعياري

٢ -٨-٣ معامل التواء بيرسون الثاني :

$$\text{ل}_2 = \frac{٣\,(\bar{\text{س}} - \text{و})}{\sigma} \qquad (٢-٣٥)$$

حيث و هو الوسيط

٢-٨-٤ معامل بولي للإلتواء Bowley :

$$\text{ل}_3 = \frac{\text{ر}_3 + \text{ر}_1 - ٢\text{ر}_2}{\text{ر}_3 - \text{ر}_1} \qquad (٢-٣٦)$$

حيث ر_1 ، ر_2 ، ر_3 الربيع الأول والثاني (الوسيط) والثالث على التوالي .

٢-٨-٥ معامل التواء العزم الثالث :

ويعتبر من أدق مقاييس الإلتواء، وصيغته :

$$\text{ل} = \frac{\text{م}_3^2}{(\sigma^2)^3} \qquad (٢-٣٧)$$

وأحياناً يستخدم الجذر التربيعي كمقياس للإلتواء ($\frac{م_3}{\sigma^3}$) حيث :

$م_3$: العزم الثالث ، وصيغته :

$$م_3 = \frac{مجـ(س - \bar{س})^3 ك}{ن} \qquad (٢-٣٨)$$

٢ - ٩

مقاييس التفرطح

Measures of Kurtosis

٢ - ٩

مقاييس التفرطح

Kurtosis

من الخصائص الأخرى للتوزيعات والتي ينبغي وصفها تحديد درجة تفرطحها، فقد يتساوى توزيعان في المتوسط وفي التشتت وفي الإلتواء ولكن قد يكون أحدهما أكثر تفرطحاً من الآخر .

وهذه الخاصية تقاس بمعامل التفرطح :

$$\text{ت} = \frac{\text{م}_{٤}}{\sigma^{٤}} - ٣ \qquad (٢-٣٩)$$

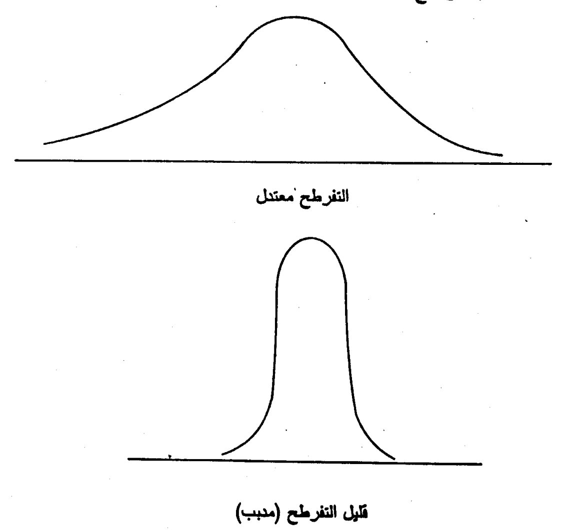
$$\text{حيث م}_{٤} = \frac{\text{مجـ}(\text{س}-\bar{\text{س}})^{٤}\,\text{ك}}{\text{ن}} \qquad (٢-٤٠)$$

وهو العزم الرابع. ويتطلب حساب معامل التفرطح أن تكون المتغيرات كمية، كما أن حسابه يكون مناسباً في حالة التوزيعات ذات القيمة الواحدة وتكون قيمة هذا المعامل صفراً إذا كان التوزيع طبيعي(★) .

وإذا كانت القيمة موجبة فإن ذلك يعني أن التوزيع تتركز قيمه قريبة من المتوسط بدرجة أكثر من التوزيع الطبيعي المساوي له في الإنحراف المعياري. وإذا كانت القيمة سالبة فإن ذلك يعني أن التوزيع تكون قيمه أقل تركزاً بالقرب من المتوسط وذلك بالمقارنة بالتوزيع الطبيعي المساوي له في الإنحراف المعياري .

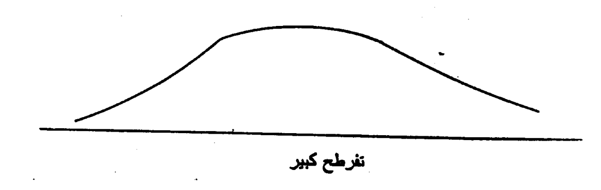
(★) انظر الفصل ٢ - ١٢ .

ويعتبر التوزيع الطبيعي ذو تفرطح معتدل Mesokurtic والتوزيعات التي يكون فيها معامل التفرطح موجباً تعد قليلة التفرطح Leptokurtic . أما التوزيعات التي يكون فيها المعامل سالباً تعد ذو تفرطح كبير Platykurtic . والأشكال التالية توضح ذلك .



التفرطح معتدل

قليل التفرطح (مدبب)



تفرطح كبير

تطبيـق ١ :

في التطبيق الخاص بدرجات الطلبة، المطلوب :

١ - قياس الإلتواء باستخدام :

(أ) معامل التواء بيرسون الأول .

(ب) معامل التواء بيرسون الثاني .

(جـ) معامل التواء بولي .

(د) معامل التواء العزم الثالث .

٢ - قياس التفرطح :

□ الحــل : ١ - قياس الإلتواء .

(أ) بيرسون $\text{ل}_{١}$ = $\dfrac{\text{سَ} - \text{مـ}}{\sigma}$

$$= \frac{\text{٥٢} - \text{٥٢,٩}}{\text{١٤,٥٩٥}} = -\text{٠,٠٦}$$

(ب) بيرسون $\text{ل}_{٢}$ = $\dfrac{\text{٣}\,(\text{سَ} - \text{و})}{\sigma}$

$$= \frac{\text{٣}\,(\text{٥٢}-\text{٥٢,١٤})}{\text{١٤,٥٩٥}} = -\text{٠,٠٣}$$

(جـ) بولي $\text{ل}_{٣}$ = $\dfrac{\text{ر}_{٣} + \text{ر}_{١} - \text{٢ر}_{٢}}{\text{ر}_{٣} - \text{ر}_{١}}$

$$= \frac{\text{٦١,٧} + \text{٤٢,١} - \text{٢}\,(\text{٥٢,١٤})}{\text{٦١,٧} - \text{٤٢,١}} = -\text{,٠٢}$$

(د) معامل التواء العزم الثالث :

$$\text{م}_{٣} = \frac{\text{مجـ}(\text{س}-\text{سَ})^{٣}\,\text{ل}}{\text{ن}} = \frac{\text{١٦٢٠٠}}{\text{٥٠}} = \text{٣٢٤}$$

$$\text{ل} = \frac{\text{م}_{٣}^{٢}}{(\sigma^{٢})^{٣}} = \frac{(\text{٣٢٤})^{٢}}{(\text{١٤,٥٩٥}^{٢})^{٣}} = \frac{\text{١٠٤٩٧٦}}{\text{٩٦٦٥٥٠٦}} = \text{٠١}.$$

وهذه النتائج كلها تشير إلى أن التوزيع قريب من التماثل .

الدرجات	ك	س	س - س̄	ك(س-س̄)^{٢}	ك(س-س̄)^{٣}	ك(س-س̄)^{٤}
٢٠-٣٠	٤	٢٥	-٢٧	٢٩١٦	-٧٨٧٣٢	٢١٢٥٧٦٤
٣٠-٤٠	٦	٣٥	-١٧	١٧٣٤	-٢٩٤٧٨	٥٠١١٢٦
٤٠-٥٠	١٢	٤٥	-٧	٥٨٨	-٤١١٦	٢٨٨١٢
٥٠-٦٠	١٤	٥٥	٣	١٢٦	٣٧٨	١١٣٤
٦٠-٧٠	٩	٦٥	١٣	١٥٢١	١٩٧٧٣	٢٥٧٠٤٩
٧٠-٨٠	٣	٧٥	٢٣	١٥٨٧	٣٦٥٠١	٨٣٩٥٢٣
٨٠-٩٠	٢	٨٥	٣٣	٢١٧٨	٧١٨٧٤	٢٣٧١٨٤٢
	٥٠			١٠٦٥٠	١٦٢٠٠	٦١٢٥٢٥٠

٢ - قياس التفرطح :

العزم الرابع م$_{٤}$ = $\frac{\text{مجـ (س-س̄)}^{٤}\text{ك}}{\text{ن}}$ = $\frac{٦\ ١٢٥\ ٢٥٠}{٥٠}$ = ١٢٢٥٠٥

ت = $\frac{\text{م}_{٤}}{\sigma^{٤}}$ - ٣ = $\frac{١٢٢٥٠٥}{(١٤,٥٩٥)^{٤}}$ - ٣

= $\frac{١٢٢\ ٥٠٥}{٤٥\ ٣٧٥}$ - ٣ = ٢,٧ - ٣ = - ٠,٣

٢ - ١٠

مقاييس التركيز

Concentration Measures

الأهميـــة
منحنى لورنز
نسبة جيني

٢ - ١٠
مقاييس التركيز
Concentration Measures

٢-١٠-١ الأهميـــة

تستخدم هذه المقاييس لقياس مدى تركز المتغيرات لدى بعض الفئات في وقت معين أو عبر الزمن. مثال ذلك :

- تركز الدخل أو الأراضي لدى بعض الأفراد أو المجموعات .
- تركز الصناعة أو السوق في عدد قليل من المشروعات أو في مناطق قليلة .
- تركز السكان في مساحة قليلة من الأراضي .
- تركز الأرباح لدى بعض الشركات .

وهناك عدة أساليب تستخدم لقياس التركيز أهمها :

١ - منحنى لورنز Lorenz curve .

٢ - نسبة التركيز لجيني Gini concentration ratio .

٣ - معامل شوتز Schutz coefficient .

٤ - دليل هيرفندال Herfindahl index .

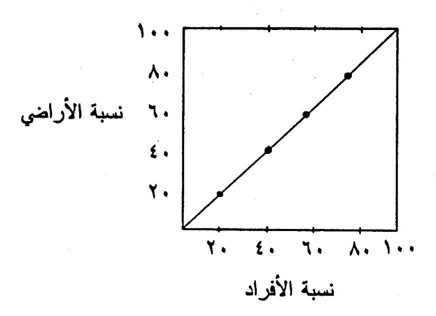
وفيما يلي نعرض منحنى لورنز ونسبة التركيز لجيني باعتبارهما من أكثر الأساليب شيوعاً في هذا المجال .

٢-١٠-٢ منحنى لورنز :

هو شكل بياني قدمه Lorenz عام ١٩٠٥ لقياس مدى تركز المتغير لدى بعض الفئات. ويتم تحديد مقدار التركز باعتباره ممثلا بالمساحة بين منحنى لورنز ومنحنى المساواة. وتقوم الفكرة على أساس أنه إذا كانت هناك مساواة في توزيع الأراضي على الأفراد مثلا لوجدنا أن :

١٠٪ من الأفراد يملكون ١٠٪ من الأراضي .
٢٠٪ من الأفراد يملكون ٢٠٪ من الأراضي .
وهكــذا ...

وإذا عرضنا هذه العلاقة بيانياً نجدها ممثلة بخط مستقيم وهذا ما يسمى منحنى (خط) التوزيع المتساوي Line of equal distribution وبإختصار منحنى المساواة ويظهر في شكل مربع كالآتي :



غير أنه من النادر أن يكون التوزيع على هذه الصورة ولذا نقوم بعرض المنحنى الفعلي في نفس الوقت مع منحنى المساواة ويكون الفرق في المساحة بينهما ممثلا لمقدار التركز ويتم رسم منحنى لورنز بنفس الطريقة أي بعرض العلاقة بين :

- نسبة الأفراد [تكرار متجمع نسبي] .
- نسبة الأراضي [وهو أيضاً تجميع نسبي للأراضي المملوكة] .

ويمكن رسم عدة منحنيات في نفس الشكل – وذلك لأغراض المقارنة، مثال ذلك مقارنة مدى تركز الدخل أو الأراضي لدى الأفراد في أزمنة مختلفة وكذا لمقارنة مدى تركز الإنتاج لدى شركات الغزل وشركات الأغذية وشركات الأدوية .

وباستخدام الرموز، لنفرض أنه لدينا توزيع تكراري

ك عدد الأفراد أو التكرار بكل فئة

س قيمة المتغير، مثلا الأراضي المملوكة لمجموعة الأفراد وعددها ك.وفي حالة ماإذا كانت س ترمز لمركز الفئة فإن قيمة الأراضي المملوكة تصبح س ك .

[ك] التكرار المتجمع

[س] القيم المتجمعة للمتغير

ك التكرار المتجمع معروض كنسبة من التكرار الكلي

س القيم المتجمعة للمتغير معروضة كنسبة من مجموع القيم .

وبذلك يكون منحنى لورنز هو عرض بياني للعلاقة بين ك ، س .

تطبيــق ١ :

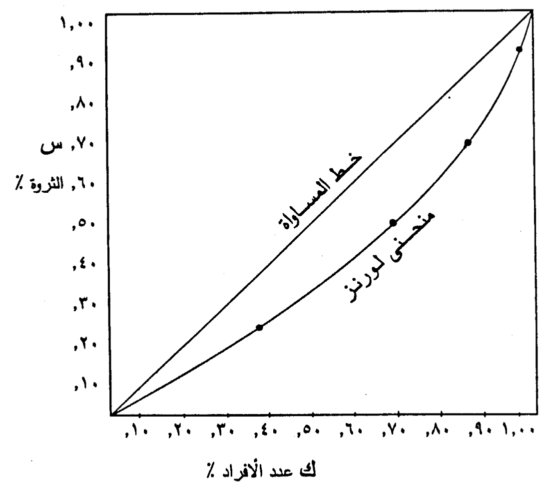
التوزيع التالي يوضح عدد الأشخاص والثروة المملوكة لدى كل مجموعة. والمطلوب عرض منحنى لورنز لتوضيح مدى تركز الثروة .

عـدد الأشخاص	١٣	١٠	٥	٤	١
الثـروة (ألف)	٧٨	١٠٠	٧٥	٨٠	٢٥

الحـــل :

ك	س	[ك]	[س]	ك	س
١٣	٧٨	١٣	٧٨	,٤٠	,٢٢
١٠	١٠٠	٢٣	١٧٨	,٧٠	,٥٠
٥	٧٥	٢٨	٢٥٣	,٨٥	,٧١
٤	٨٠	٣٢	٣٣٣	,٩٧	,٩٣
١	٢٥	٣٣	٣٥٨	١,٠٠	١,٠٠

ونحصل على منحنى لورنز بعرض العلاقة بين (ك ، س) بيانياً كما يلي:

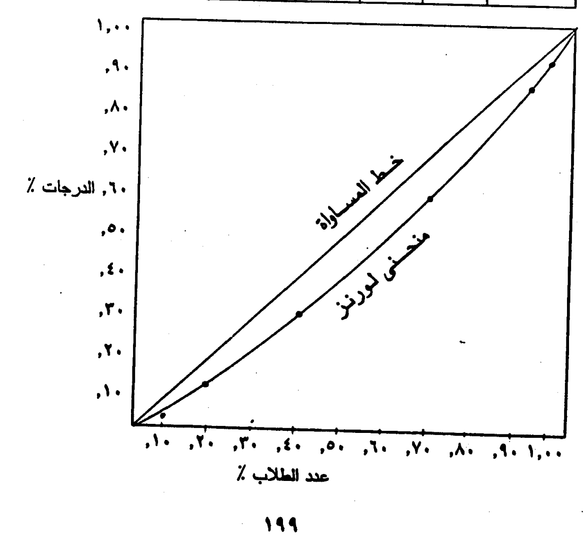


تطبيـق ٢ :

بالإشارة إلى التطبيق الخاص بدرجات الطلاب
المطلوب عرض منحنى لورنز لتوضيح مدى تركز الدرجات .

□ الحـــل :

الفئات	ك	س	[ك]	[س]	ك	س
٢٠-٣٠	٤	٢٥	٤	١٠٠	٠,٠٨	٠,٠٤
٣٠-٤٠	٦	٣٥	١٠	٣١٠	٠,٢٠	,١٢
٤٠-٥٠	١٢	٤٥	٢٢	٨٥٠	,٤٤	,٣٣
٥٠-٦٠	١٤	٥٥	٣٦	١٦٢٠	,٧٢	,٦٢
٦٠-٧٠	٩	٦٥	٤٥	٢٢٠٥	,٩٠	,٨٥
٧٠-٨٠	٣	٧٥	٤٨	٢٤٣٠	,٩٦	,٩٣
٨٠-٩٠	٢	٨٥	٥٠	٢٦٠٠	١,٠٠	١,٠٠



٢-١٠-٣ نسبة جيني للتركيز Gini Concentration ratio :

قدمه جيني Gini لقياس المساحة المحصورة بين منحنى لورنز وخط المساواة، وهذا القياس في صوره نسبة إلى المساحة الكلية تحت خط المساواة (القطر) ويتم حساب هذه النسبة باستخدام الصيغة التالية(★) :

$$ج = مجـ\, س_{ر}\, ك_{ر+١} - مجـ\, س_{ر+١}\, ك_{ر} \qquad (٢-٤١)$$

حيث ج نسبة جيني للتركيز

س ر ك ر كما سبق تعريفهما من منحنى لورنز، ويتم التجميع على كل الفئات .

تطبيـق ٣ :

احسب نسبة جيني للتركيز في التطبيق ١ الخاص بتوزيع الثروة .

□ الحـل :

ك	س	$س_{ر}\, ك_{ر+١}$	$س_{ر+١}\, ك_{ر}$
,٤٠	٠,٢٢	٠,١٥٤	٠,٢٠٠
,٧٠	٠,٥٠	٠,٤٢٥	٠,٤٩٧
,٨٥	٠,٧١	٠,٦٨٩	٠,٧٩١
,٩٧	٠,٩٣	٠,٩٣	٠,٩٧٠
١,٠	١,٠٠		
		٢,١٧٨	٢,٤٥٨

نسبة جيني للتركيز = ٢,٤٥٨ − ٢,١٧٨ = ٠,٢٨

(★) Shryock, H et al (1976), The methods and materials of Demography, Academic Press, New york, p.p. 98.

١١ - ٢

مقاييس المركز النسبي

Measures of relative Positions

الأهميـــة

الرتبة المئينية

الدرجة المعيارية

الدرجات المعيارية المعدلة

٢ - ١١
مقاييس المركز النسبي
Measures of Relative Positions

٢-١١-١ الأهميـة :

إن القيم الخام في حد ذاتها لا تتضمن معنى كاف للافصاح عن حقيقتها ومركزها كما أنها في كثير من الأحيان لا تصلح لأغراض المقارنات أو لأغراض دمجها مع مثيلاتها من القيم الأخرى. فبفرض أن أحد الطلبة حصل على ٦٠ درجة في اختبار الإحصـاء، فكيف يكون حكمنـا على مستوى هذا الطالب إذا علمنا أن درجة الاختبار من مائة؟ هل نستطيع القول أن مستواه عال ـ متوسط ـ منخفض؟ في الحقيقة لا نستطيع. قد يكون الاختبار صعباً إلى درجة كبيرة وأن هذا الطالب قد حصل على اعلى درجة، وبذلك يمكن القول أن مستوى هذا الطالب عال، وبالعكس قد يكون الاختبار سهلاً للغاية، وقد تكون هذه الدرجة اقل الدرجات، وبذلك يمكن القول أن مستوى هذا الطالب منخفضاً. أي أن القيم الخام يحسن الحكم عليها في ضوء مركزها النسبي من المجموعة التي تنتمي إليها.

ونعرض فيما يلي لنوعين من المقاييس الاحصائية التي تستخدم لتحديد المراكز النسبية للقيم وهما الرتبة المئينية والدرجة المعيارية.

٢-١١-٢ الرتبة المئينية (Percentile rank) :

عند ترتيب القيم ترتيباً تصاعدياً يمكن إستخدام الرتب لبيان المركز النسبي لهذه القيم، على أنه لأغراض المقارنات وزيادة الايضاح فإنه يفضل

عرض هذه الرتب كنسب مئوية، وتعرف الرتبة المئينية لقيمة معينة في مجموعة معينة بالنسبة المئوية لعدد القيم الأقل منها.

$$\text{الرتبة المئينية للقيمة س} = \frac{١٠٠}{ن} (\text{رتبة س} - ٠,٥)$$

$$[\text{س}] = \frac{١٠٠}{ن} (\text{رتبة س} - ٠,٥) \qquad (٢-٤٢)$$

حيث ن عدد القيم في المجموعة، رتبة س تحدد على أساس ترتيب القيم تصاعدياً. وفي حالة وجود قيود أي تكرار بعض القيم، تحسب الرتبة على أساس متوسط رتب هذه القيم. أما بالنسبة للبيانات المبوبة، يمكن الحصول على هذه الرتب بسهولة وذلك برسم المضلع (أو المنحنى) التكراري المتجمع الصاعد ــ وذلك بعد تحويل التكرارات إلى تكرارات نسبية. كما أنه يمكن استخدام الصيغة التالية مباشرة.

$$\text{الرتبة المئينية للقيمة س} = \frac{١٠٠}{ن} \left[\text{التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة} + \frac{\text{س} - \text{بداية الفئة}}{\text{طول الفئة}} \times \text{تكرار الفئة} \right]$$

$$[\text{س}] = \frac{١٠٠}{ن} \left[\text{ك.ص.س} + \frac{\text{س} - \text{ب}}{\text{ل}} \times \text{ك} \right] \qquad (٢-٤٣)$$

والمقصود بالفئة في الصيغة اعلاه، الفئة التي تحوي القيمة س.

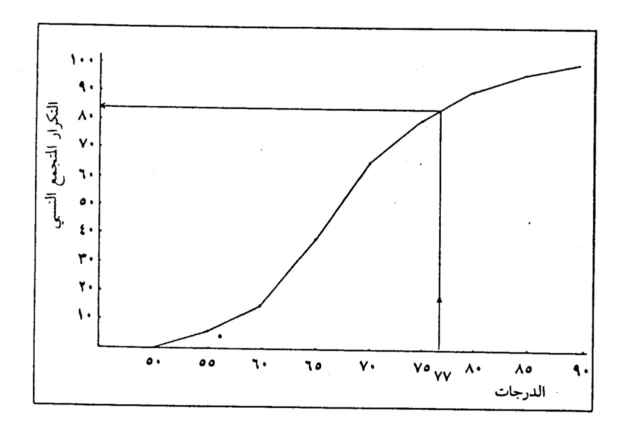
□ **مثال ١ :**

لتوضيح الخطوات اللازمة، نوجد الرتبة المئينية المقابلة للدرجة ٧٧ للتوزيع التكراري الموضح أدناه.

(أ) عن طريق الرسم:

نبدأ بإيجاد التكرار المتجمع الصاعد ثم التكرار النسبي وبعد الرسم نوجد نسبة التكرار المناظرة للدرجة ٧٧ وهي تعادل ٨٤ تقريباً وهي الرتبة المئينية المقابلة للدرجة ٧٧.

الدرجات	التكرار	التكرار الصاعد	التكرار الصاعد النسبي
٥٠ ــ ٥٥	١٠	١٠	٥
٥٥ ــ ٦٠	٢٠	٣٠	١٥
٦٠ ــ ٦٥	٤٦	٧٦	٣٨
٦٥ ــ ٧٠	٥٤	١٣٠	٦٥
٧٠ ــ ٧٥	٣٠	١٦٠	٨٠
٧٥ ــ ٨٠	٢٠	١٨٠	٩٠
٨٠ ــ ٨٥	١٢	١٩٢	٩٦
٨٥ ــ ٩٠	٨	٢٠٠	١٠٠
	٢٠٠		



(ب) باستخدام الصيغة الحسابية:

الرتبة المئينية للدرجة ٧٧ = $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ [١٦٠ + $\frac{٧٧ - ٧٥}{٥}$ (٢٠)]

= $\frac{١}{٢}$ [١٦٠ + ٨] = ٨٤

وبإيجاد الرتب المئينية يتم تحويل القيم الخام (سواء كانت رقمية أو غير رقمية ويمكن ترتيبهـا) إلى أخرى حتى يمكن فهمهـا وتفسيرهـا، كما يمكن استخدامها لغرض المقارنات مع غيرها من القيم. ويعاب على الرتب المئينية أنها لا تعتبر مقياساً أو تدريجاً له وحدات متساوية، وبالتالي فإنه لا يمكن جمعها (لايجاد متوسط مجموعة من الدرجات مثلاً) ــ وأخيراً فإن الرتبة المئينية توضح لنا المركز النسبي للقيمة الخام في ضوء مجموعة معينة من القيم ويجب تفسيرها في ضوء ذلك.

٢-١١-٣ الدرجة المعيارية :

تعتبر الدرجة المعيارية من أهم مقاييس المركز النسبي، وهي تعبر عن بعد الدرجة الخام عن المتوسط الحسابي للمجموعة، ويقاس هذا البعد بوحدات من الانحراف المعياري. ويتم حساب الدرجة المعيارية س′ لأي قيمة س في المجموعة كما يلي:

$$س' = \frac{س - \bar{س}}{\sigma} \qquad (٢-٤٤)$$

وهذه القيم المعيارية تمكننا من تفهم طبيعة القيم الخام، ومقارنتها كما أنها تقدم مقياساً أو تدريجاً له وحدات متساوية، وبالتالي فإنه يمكن جمع مجموعة من الدرجات المعيارية، كما لو أردنا حساب متوسط درجات الطالب مثلاً.

وكما تحدثنا بالنسبة للرتبة المئينية فإن الدرجة المعيارية لقيمة ما تعبر كذلك عن مركزها النسبي في ضوء مجموعة معينة من القيم.

□ **خصائص الدرجات المعيارية:**

(١) $\text{مجـ}\ س' =$ صفر، أي أن مجموعها يساوي صفراً.

(٢) $\bar{س'} =$ صفر، أي أن متوسطها الحسابي يساوي صفراً.

(٣) مجـ $س'^٢$ = ن، أي أن مجموع مربعاتها يساوي عدد القيم.

(٤) $\sigma_{س'}$ = ١، أي أن انحرافها المعياري (وكذا التباين) يساوي واحد صحيح.

□ **مثال ٢ :**

حصل طالب على ٦٠ درجة في مادة الاحصاء، وعلى ٧٠ درجة في مادة الاجتماع، وكان الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في المادتين ٥٤، ٦٥ على الترتيب وكان الانحراف المعياري ٢، ٢,٥ على الترتيب ففي أي المادتين يكون مستوى ذلك الطالب أفضل.

□ **الحل:**

$$\text{الدرجة المعيارية لدرجة الاحصاء} = \frac{٦٠ - ٥٤}{٢} = ٣$$

$$\text{الدرجة المعيارية لدرجة الاجتماع} = \frac{٧٠ - ٦٥}{٢,٥} = ٢$$

وبالتالي يعتبر مستواه في الاحصاء أعلى من مستواه في الاجتماع حيث أن درجته في الاحصاء تبعد عن المتوسط بثلاث وحدات من الانحراف المعياري، أما درجته في الاجتماع تبعد بدرجتين فقط.

□ **مثال ٣ :**

حول مجموعة القيم التالية إلى درجات معيارية:

٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨

□ الحل:

س	$س^2$	س′
٢	٤	-١,٥
٣	٩	-١
٤	١٦	-٠,٥
٥	٢٥	صفر
٦	٣٦	٠,٥
٧	٤٩	١
٨	٦٤	١,٥
٣٥	٢٠٣	

$$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} = \frac{٣٥}{٧} = ٥$$

$$\sigma_{س} = \sqrt{\frac{١}{ن}[مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}]} = \sqrt{\frac{١}{ن}[٢٠٣ - \frac{(٣٥)^2}{٧}]}$$

$$= \sqrt{٤} = ٢$$

$$س′ = \frac{س - \bar{س}}{\sigma}$$

وعلى سبيل المثال تكون الدرجة المعيارية لقيمة س = ٢ كما يلي:

$$س′ = \frac{٢ - ٥}{٢} = \frac{-٣}{٢} = -١,٥$$

وتكون الدرجة المعيارية للقيمة ٣ كما يلي:

$$س′ = \frac{٣ - ٥}{٢} = \frac{-٢}{٢} = -١$$

وهكذا يتم حساب الدرجات المعيارية لباقي القيم (ويمكنك التحقق من أن متوسطها يساوي صفراً وأن انحرافها المعياري يساوي واحد صحيح).

٢-١١-٤ الدرجات المعيارية المعدلة :

يلاحظ على الدرجات المعيارية أنها تتضمن كسوراً نظراً لأنها تنحصر في مدى ليس كبيراً ــ كما انها تتضمن بالضرورة بعض القيم السالبة. وهذه الأمور غير مرغوب فيها ويصعب تفهمها خاصة بالنسبة للقارىء العادي وللتخلص من هذه الأمور يتم تحويل الدرجات المعيارية إلى درجات أخرى، وهي على أي حال كثيرة ومتعددة، والصيغة العامة للتحويل هي:

ص = أ + ب س′ (٢-٤٥)

حيث: ص = هي الدرجة المعيارية المعدلة.

أ = المتوسط الحسابي المرغوب فيه للتوزيع

ب = الانحراف المعياري المرغوب فيه للتوزيع.

□ **مثال ٤ :**

حول مجموعة القيم التالية إلى درجات معيارية متوسطها ٥٠ وانحرافها المعياري يساوي ١٠

٢ ، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨

□ **الحل:**

نبدأ أولاً بإيجاد الدرجات المعيارية س وهذه تم الحصول عليها بالمثال السابق، ثم نعوض في الصيغة الموضحة اعلاه، كما هو موضح فيما يلي:

س	س'	ص = ٥٠ + ١٠س'
٢	-١,٥	٣٥
٣	-١	٤٠
٤	-٠,٥	٤٥
٥	صفر	٥٠
٦	٠,٥	٥٥
٧	١	٦٠
٨	١,٥	٦٥

* **ملحوظة**: يمكنك التحقق من أن قيم ص متوسطها يساوي ٥٠ وانحرافها المعياري يساوي ١٠.

□ **تطبيـق ٥ :**

البيان التالي يعرض درجات ثلاث اختبارات أجريت لخمس طلاب. أوجد متوسط درجة كل طالب بعد تحويل الدرجات إلى درجات معيارية.

الطالب	اختبار أ	اختبار ب	اختبار ج
١	١٠٠	٧٥	٥٣
٢	٩٠	٨٠	٥٧
٣	٧٠	٦٠	٥٥
٤	٥٠	٥٠	٤٥
٥	٤٠	٤٥	٥٠

□ **الحل:**

نبدأ بإيجاد المتوسط الحسابي وكذا الانحراف المعياري لكل اختبار من الاختبارات الثلاث. وهي كما يلي:

المتوسط: ٧٠، ٦٢، ٥٢

الانحراف المعياري: ٢٢,٨، ١٣,٦٤، ٤,٢

وبتطبيق الصيغة الخاصة بالدرجة المعيارية، س' = $\frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\sigma}$ نحصل على القيم الموضحة بالجدول ادناه. وعلى سبيل المثال:

الدرجة المعيارية للطالب رقم(١) في المادة أ = $\frac{\text{١٠٠} - \text{٧٠}}{\text{٢٢,٨}}$ = ١,٣١٦

الدرجة المعيارية للطالب رقم (٤) في المادة ب = $\frac{\text{٥٠} - \text{٦٢}}{\text{١٣,٦٤}}$ = -٠,٨٨٠

	إختبار أ	إختبار ب	إختبار ج	المتوسط
١	١,٣١٦	٠,٩٥٣	٠,٢٣٨	٠,٨٣٥
٢	٠,٨٧٧	١,٣٢٠	١,١٩٠	١,١٢٩
٣	صفر	-٠,١٤٧	٠,٧١٤	٠,١٨٩
٤	-٠,٨٧٧	-٠,٨٨٠	-١,٦٦٦	-١,١٤١
٥	-١,٣١٦	-١,٢٤٦	-٠,٤٧٦	-١,٠١٣

٦ - في مادة الاحصاء حصل أحد الطلاب على ٨٠ درجة في أحد الاختبارات وعلى ٧٥ درجة في اختبار آخر. فهل يعني ذلك أن مستواه قد انخفض؟ أجب في ضوء البيانات التالية:

	المتوسط الحسابي	التباين
الاختبار الأول	٧٠	١٦
الاختبار الثاني	٦٦	٩

□ الحل:

يمكن القول أن مستواه قد ارتفع حيث أن درجاته المعيارية هي ٢,٥، ٣ على الترتيب.

٧ - حول القيم التالية إلى درجات معيارية، ثم إلى درجات معياريةمتوسطها ٥٠٠ وانحرافها المعياري ١٠٠

٦، ١٢، ١٤، ٢٠

□ الحل:

$\bar{س}$ = ١٣، σ = ٥

الدرجات المعيارية: $س' = \frac{س - \bar{س}}{\sigma}$ وتكون كما يلي:

-١,٤، -٠,٢، ٠,٢، ١,٤

الدرجة المعيارية المعدلة: ص = ٥٠٠ + ١٠٠ س′ وتكون الدرجات كما يلي:

٣٦٠، ٤٨٠، ٥٢٠، ٦٤٠

٨ ـ البيان التالي يوضح درجات عشرين طالباً، والمطلوب تحديد الرتبة المئينية المناظرة للدرجات ٤، ٧، ٨

الترتيب	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الدرجة	صفر	٢	٢	٣	٣	٤	٥	٥	٥	٦
الترتيب	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
الدرجة	٦	٧	٧	٨	٨	٨	٨	٩	٩	١٠

□ الحل:

$$\text{الرتبة المئينية للدرجة س} = \frac{\text{رتبة س} - ٠,٥}{\text{ن}} \times ١٠٠$$

$$\text{الرتبة المئينية للدرجة ٤} = \frac{٦ - ٠,٥}{٢٠} \times ١٠٠ = ٢٧,٥$$

متوسط رتبة الدرجة ٧ = (١٢ + ١٣) ÷ ٢ = ١٢,٥

$$\text{الرتبة المئينية للدرجة ٧} = \frac{١٢,٥ - ٠,٥}{٢٠} \times ١٠٠ = ٦٠$$

متوسط رتب الدرجة ٨ = (١٤+١٥+١٦+١٧) ÷ ٤ = ١٥,٥

$$\text{الرتبة المئينية للدرجة ٨} = \frac{١٥,٥ - ٠,٥}{٢٠} \times ١٠٠ = ٧٥$$

٩ ـ فيما يلي درجات أحد الطلاب في المواد المقررة، وكذا المتوسط الحسابي والانحراف المعياري بكل مادة. والمطلوب تقييم تحصيل الطالب في المواد المختلفة بترتيبها حسب مستواه:

المادة	الدرجة الخام	المتوسط الحسابي	الانحراف المعياري
إحصاء	٧٥	٦٩	٣
إجتماع	٨٥	٧٥	٧
علم نفس	٩٠	٨٥	٨
تربية	٨٠	٧٠	٦
لغات	٦٠	٦٤	٨

□ الحل:

الدرجة المعيارية للقيمة س = $\frac{س - \bar{س}}{\sigma}$

من الدرجات المعيارية في المواد المختلفة يتبين أن مستواه في هذه المواد على الترتيب هو: الاحصاء التربية، الاجتماع، علم النفس، اللغات حيث أن الدرجات المعيارية هي ٢، ١,٧، ١,٤٣، ٠,٦٢، -٠,٥

□ □ □

١٠ – حول القيم التالية إلى درجات معيارية .

١ ، ٧

□ **الحـــل :**

س	س٢	سَ
١	١	-١
٧	٤٩	+١
٨	٥	

$$\bar{\text{س}} = \frac{٨}{٢} = ٤$$

$$\sigma^{٢} = \frac{١}{\text{ن}} [\text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}] = \frac{١}{٢} [٥٠ - \frac{(٨)^{٢}}{٢}] = ٩$$

$$\sigma = ٩ = ٣$$

$$\text{سَ} = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\sigma}$$

$$١ = \frac{١ - ٤}{٣} = \frac{-٣}{٣} = -١$$

$$٧ = \frac{٧ - ٤}{٣} = \frac{٣}{٣} = +١$$

١١ - حول مجموعة القيم التالية إلى درجات معيارية .

٣ ، ١ ، ١ ، ٣

□ الحـــل :

س	$س^٢$	سَ
٣	٩	١
١	١	١-
١	١	١-
٣	٩	١
٨	٢٠	

$$\bar{س} = \frac{مجـ\ س}{ن} = \frac{٨}{٤} = ٢$$

$$\sigma^٢ = \frac{١}{٤}\left[٢٠ - \frac{٨^٢}{٤}\right] = ١$$

$$\sigma = ١ = ١$$

$$سَ = \frac{س - \bar{س}}{\sigma}$$

١٢ – المطلوب تعيين الطالب المثالي (الحاصل على أفضل تقدير) وذلك من أوائل المستويات المختلفة ، في إحدى الكليات وذلك باستخدام البيانات التالية :

المستوى الدراسي	الأول	الثاني	الثالث	الرابع
متوسط درجات الطلبة	٦٢	٦٦	٦٨	٦٩
الانحراف المعياري	١٠	٦	٤	٣
معدل الطالب الأول	٩٢	٩٠	٨٨	٨٧

□ الحـــــل :

الدرجة المعيارية سَ =	٣	٤	٥	٦

حيث سَ = $\frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\sigma}$

وبذلك يكون الطالب المثالي هو أول المستوى الرابع .

٢ – ١٢

التوزيع الطبيعي

Normal distribution

الأهميـــة

خواص التوزيع الطبيعي

التوزيع الطبيعي المعياري

٢ - ١٢

التوزيع الطبيعي

Normal Distribution

٢-١٢-١ الأهميـــة :

تعرضنا في الفصول السابقة لبعض المقاييس الاحصائية وكيفية حسابها من البيانات بعد تنظيمها في صورة توزيع تكراري.

ويلاحظ أن شكل التوزيع التكراري لعدد كبير من المتغيرات يكون متماثلاً ويشبه إلى حد كبير أحد التوزيعات النظرية الهامة يسمى التوزيع الطبيعي، وشكله موضح أدناه. ومن أمثلة هذه المتغيرات، أطوال مجموعة من الأشخاص، أوزانهم؛ نسبة الذكاء، التحصيل العلمي، الأجور، إنتاجية الفدان...

والمنحنى الطبيعي له أهمية عظمى في الاستدلال الاحصائي، كما أن كثير من التوزيعات تحت شروط معقولة تؤول إلى التوزيع الطبيعي. كما أنه يستخدم كتقريب معقول لكثير من التوزيعات سواء المستمرة أوغير المستمرة. وحتى بالنسبة للتوزيعات التي لا تتبع التوزيع الطبيعي، يمكن إجراء بعض التحويلات عليها لجعلها تتبع التوزيع الطبيعي.

والتوزيع الطبيعي ليس توزيعاً وحيداً ولكنه عائلة من التـوزيعات، ويتحدد شكل التوزيع تماماً بمجرد معرفة المتوسط الحسابي والانحراف المعياري.

٢-١٢-٢ خواص التوزيع الطبيعي :

(أ) المساحة تحت المنحنى تساوي واحد صحيح.
(ب) المنحنى متماثل حول المتوسط.

(ج) المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.

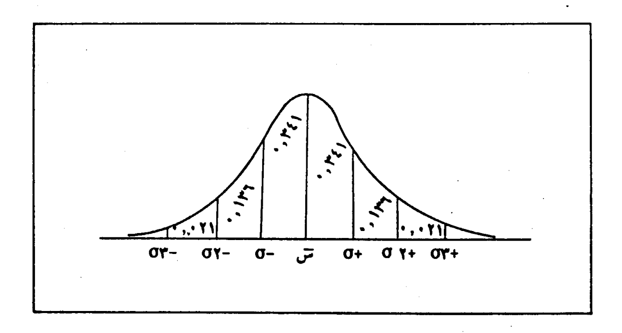
(د) الفترة على يمين المتوسط الحسابي وحتى بعد قدرة σ تحوي ٣٤٪ من التكرارات، وباعتبار أن التوزيع متماثل نجد الأمر كذلك بالنسبة للفترة على يسار المتوسط، ونعبر عن ذلك باختصار بكتابة

سَ ± σ تحوي ٦٨,٢٧٪ من التكرارات.

وكذلك سَ ± ٢σ تحوي ٩٥,٤٥٪ من التكرارات.

سَ ± ٣σ تحوي ٩٩,٧٣٪ من التكرارات.

والشكل التالي يوضح ملامح التوزيع الطبيعي:



٢-١٢-٣ التوزيع الطبيعي المعياري (Standard normal) :

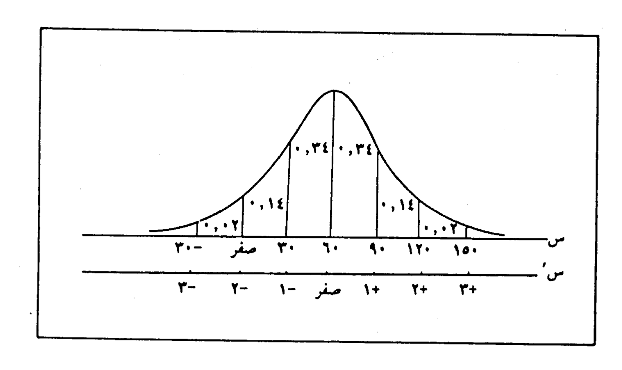
نظراً لأهمية التوزيع الطبيعي، فقد أعدت جداول تمكن من استخراج المعلومات عن التوزيع التكراري، ونظراً لأنه يوجد العديد من التوزيعات الطبيعية تختلف بحسب قيم المتوسط الحسابي والانحراف المعياري، وحتى يتم التعامل مع توزيع واحد فإنه يتم تحويل التوزيع إلى توزيع معياري. وقد

أعدت جداول لهذا الأخير، معروضة في نهاية الفصل.

هذا ويتم تحويل التوزيع إلى توزيع معياري بنفس القاعدة السابق ذكرها وهي:

$$س' = \frac{س - \bar{س}}{\sigma}$$

هذا ويلاحظ أن التوزيع الطبيعي المعياري متوسطه صفر وانحرافه المعياري واحد صحيح. والشكل التالي يوضح توزيعاً طبيعياً متوسطه ٦٠ وانحرافه المعياري ٣٠ والقيم المناظرة بالدرجات المعيارية.



ويلاحظ أن نسبة التكرارات للقيم التي تقع بين ٦٠، ٩٠ هي ٣٤٪، وباستخدام الدرجات المعيارية يمكن القول أن نسبة التكرارات للقيم التي تقع بين صفر، ١ هي أيضاً ٣٤٪. وكذلك يمكن القول بأن نسبة التكرارات للقيم الواقعة بين -١،+١ هي ٦٨٪ وهكذا. والجدول المعروض في نهاية الفصل يوضح العلاقة بين الدرجات المعيارية والمساحة تحت المنحنى أي التكرار

النسبي، وهو يعرض ذلك لنصف التوزيع فقط، أي للقيم اكبر من الصفر باعتبار أن المنحنى متماثل وأن النصف الآخر هو صورة مكررة. وقد وضعت أرقام الدرجات المعيارية س′ بالعمود الأيمن والصف العلوي. فالعمود يوضح الأقام حتى الجزء من عشرة، أما الأجزاء من مائة فهي موضحة بالصف العلوي. والمساحة تحت المنحنى هي الموضحة في وسط الجدول وهي أجزاء من ألف. وهي توضح المساحة أو نسبة التكرارات بين صفر والدرجة المعيارية المحددة. وقد تم حذف العلامة العشرية لتبسيط العرض. ولتوضيح ذلك نفرض ان لدينا متغير طبيعي معياري (أي تم التحويل إلى درجات معيارية) فتكون المساحة أو نسبة التكرارات للقيم التي تقع ين صفر،١ هي ٠,٣٤١ (لاحظ أيضاً الشكل أعلاه) وهذا الرقم تم الحصول عليه من الجدول بالنظر إلى العمود س′ وأمام الرقم ١. وكذلك فإن المساحة بين صفر، ١,٨٥ تكون ٠,٤٦٨. وهذا الرقم موجود أيضاً بالنظر إلى العمود س′ وبالصف المناظر للقيمة ١,٨ مع العمود المناظر للقيمة ٠,٠٥ وهكذا.

□ مثال: ١

وجد باحث أن أجور العمال في إحدى الصناعات يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره ٢٠٠٠ ريال شهرياً وانحراف معياري قدره ٥٠٠ ريال. أوجد:

(أ) نسبة العمال الذين تنحصر اجورهم بين ٢٠٠٠، ٢٧٠٠ ريال.

(ب) نسبة العمال الذين تزيد أجورهم عن ٣٠٠٠ ريال.

(ج) نسبة العمال الذين تقل أجورهم عن ١٥٠٠ ريال.

(د) نسبة العمال الذين تنحصر أجورهم بين ١٦٠٠، ٢٣٠٠ ريال.

□ الحل:

حتى يمكن استخدام الجداول وإيجاد هذه النسب فإنه يجب تحويل القيم إلى درجاتها المعيارية، أي باستخدام الصيغة $\frac{س - \bar{س}}{\sigma}$.

(أ) نسبة العمال الذين تنحصر أجورهم بين ٢٠٠٠، ٢٧٠٠ هي نفسها نسبة التكرارات أو المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري والتي تقع بين $\frac{٢٠٠٠ - ٢٠٠٠}{٥٠٠}$ ، $\frac{٢٧٠٠ - ٢٠٠٠}{٥٠٠}$ أي بين صفر، ١,٤، وهذه المساحة يمكن إيجادها من الجدول وهي ٠,٤١٩.

(ب) نسبةالعمال الذين تزيد أجورهم عن ٣٠٠٠ هي نفسها نسبة التكرارات أو المساحة تحت المنحنى التي تقع بعد الدرجة المعيارية $\frac{٣٠٠٠ - ٢٠٠٠}{٥٠٠}$ = ٢

ومن الجدول نستطيع الحصول على المساحة التي تقع بين صفر، ٢ وهي ٠,٤٧٧

وتكون المساحة التي تقع بعد الدرجة المعيارية ٢ هي ٠,٥٠٠ − ٠,٤٧٧ = ٠,٠٢٣ حيث أن المساحة تحت المنحنى كله تساوي واحد صحيح.

(ج) نسبة العمال الذين تقل أجورهم عن ١٥٠٠ ريال = المساحة تحت المنحنى والمناظرة للدرجة المعيارية الأقل من $\frac{١٥٠٠-٢٠٠٠}{٥٠٠}$ = −١

وهذه تساوي ٠,٥٠٠ − ٠,٣٤١ = ٠,١٥٩

(د) نسبة العمال الذين تنحصر أجورهم بين ١٦٠٠، ٢٣٠٠ ريال. وهذه تساوي المساحة التي تقع تحت المنحنى الطبيعي المعياري والمحصورة بين $\frac{١٦٠٠ - ٢٠٠٠}{٥٠٠}$ ، $\frac{٢٣٠٠ - ٢٠٠٠}{٥٠٠}$ أي المحصورة بين −٠,٨٠٠، ٠,٦٠٠

وهذه تساوي المساحة المحصورة بين −٠,٨٠٠، صفر + لمساحة المحصورة بين صفر، ٠,٦٠٠ = ٠,٢٨٨ + ٠,٢٢٦ = ٠,٥١٤

٢ - إذا علم أن درجات طلاب الثانوية العامة تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره ٦٠ درجة وانحراف معياري قدره ١٠ درجات. أوجد:

(أ) نسبة الحاصلين على درجات أقل من ٦٠ درجة.

(ب) نسبةالحاصلين على درجات أكبر من ٧٥ درجة

(ج) نسبة الحاصلين على درجات بين ٤٠، ٥٠ درجة

(د) نسبة الحاصلين على درجات تقع بين ٥٠، ٦٥

(هـ) الدرجة المعيارية لدرجة مقدارها ٩٠.

(و) الرتبة المئينية لدرجة مقدارها ٩٠

□ الحل:

(أ) س' = $\frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\sigma}$ = $\frac{٦٠ - ٦٠}{١٠}$ = صفر وتكون نسبة الحاصلين على درجات أقل من ٦٠ هي ٠,٥.

(ب) س' = $\frac{٧٥ - ٦٠}{١٠}$ = ١,٥

(ج) نسبة الحاصلين على درجات بين ٤٠، ٥٠ هي نفس نسبةا لدرجات بين $\frac{٤٠ - ٦٠}{١٠}$ ، $\frac{٥٠ - ٦٠}{١٠}$ أي بين -٢، -١ أي ٠,٤٧٧ - ٠,٣٤١ = ٠,١٣٦

(د) نسبة الحاصلين على درجات تقع بين $\frac{٥٠ - ٦٠}{١٠}$ ، $\frac{٦٥ - ٦٠}{١٠}$ أي بين -١، ٠,٥ أي ٠,٣٤١٣ + ٠,١٩٢ = ٠,٥٣٣٣

(هـ) الدرجة المعيارية $\frac{٩٠ - ٦٠}{١٠}$ أي ٣

(و) الرتبة المئينية = ٩٩,٩

٢ – ١٣

تطبيقـــات عـامـــة



١ ــ شوهدت القيم التالية لاحدى الظواهر:

١، ٥، ٣، ٧، ٢، ٦، ٤

أوجد ما يلي:

(أ) المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

(ب) المدى والانحراف الربيعي والتباين والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف.

(ج) الرتبة المثينية المناظرة للقيمة ٥.

(د) الدرجة المعيارية المناظرة للقيم ٢، ٥

□ الحل:

(أ) المتوسط الحسابي = ٤، الوسيط = ٤، لا يوجد منوال.

(ب) المدى = ٦، الانحراف الربيعي = $\frac{٦ - ٢}{٢}$ = ٢

التباين = ٤، الانحراف المعياري = ٢،
معامل الاختلاف = ٠,٥

(ج) الرتبة المثينية
المناظرة للقيمة ٥ = $\frac{\text{عدد القيم التي تسبق ٥} + ٠,٥}{٧}$ × ١٠٠

= $\frac{٤ + ٠,٥}{٧}$ × ١٠٠ = ٦٤,٢٨

(د) الدرجة المعيارية المناظرة للقيمة ٢ = $\frac{٢ - ٤}{٢}$ = -١

الدرجة المعيارية المناظرة للقيمة ٥ = $\frac{٥ - ٤}{٢}$ = ٠,٥

٢ ـ في دراسة للكفاية الانتاجية للعمال في أحد المصانع تم تسجيل الانتاج في اليوم لكل عامل، والآتي بيان بإنتاجهم:

٧٥	٨١	٨٦	٧٤	٨٢	٨٥	٩٣	٨٢	٧١	٧٦
٨٠	٨٥	٦٦	٨٥	٨٤	٦٨	٨٤	٨٤	٧٩	٩٦
٦٧	٩٥	٨٠	٨١	٧١	٨٢	٧٨	٩٧	٧٣	٩٣
٨١	٨٣	٨٧	٧٠	٨٣	٧٩	٦٦	٧٩	٨٧	٨٢
٧٢	٨٦	٩٠	٧٥	٧٢	٨١	٨٢	٨٥	٨٩	٧٣
٨٣	٨٠	٦٧	٨٦	٧٨	٨٤	٧٦	٩١	٧٦	٩١
٧٤	٧٥	٨٥	٧١	٨٠	٦٧	٨١	٩٤	٦٨	٧٩
٨٥	٦٩	٨١	٨٠	٧٥	٨٠	٧٩	٩٦	٨٢	٨٤
٨٦	٩٠	٧٥	٨٣	٧٧	٨٧	٧١	٧٦	٨٥	٧٣
٨٨	٩٤	٨٣	٨٨	٨١	٩١	٨٥	٩٥	٨٤	٩٢

والمطلوب:

(أ) إعداد التوزيع التكراري لإنتاج العامل ـ التوزيع التكراري المتجمع الصاعد ـ التوزيع التكراري النسبي.

(ب) رسم المضلع التكراري والمنحنى التكراري والمنحنى التكراري المتجمع الصاعد.

(ج) إيجاد المتوسطات التالية:

-المتوسط الحسابي ـ الوسيط ـ المنوال.

(د) إيجاد مقاييس التشتت التالية:

المدى ـ الانحراف الربيعي ـ التباين ـ الانحراف المعياري ـ معامل الاختلاف.

(هـ) أوجد الرتبة المئينية المقابلة لإنتاج قدره ٨٠ وحدة.

(و) باستخدام الرسم أوجد الوسيط والربيع الأول والربيع الثاني والرتبة المئينية المقابلة لإنتاج قدره ٨٠ وحدة.

(ز) أوجد المنوال باستخدام الرسم.

(ح) أوجد الدرجة المعيارية المقابلة لإنتاج قدره ٩٠ وحدة.

◻ الحل:

(أ) التوزيع التكراري

الإنتاج	التكـرار		التكرار النسبي	
	الأصلي	الصاعد	الأصلي	الصاعد
٦٦ – ٧٠	٨	٨	٠,٠٨	٠,٠٨
٧٠ – ٧٤	١٠	١٨	٠,١٠	٠,١٨
٧٤ – ٧٨	١٢	٣٠	٠,١٢	٠,٣٠
٧٨ – ٨٢	٢٠	٥٠	٠,٢٠	٠,٥٠
٨٢ – ٨٦	٢٥	٧٥	٠,٢٥	٠,٧٥
٨٦ – ٩٠	١٠	٨٥	٠,١٠	٠,٨٥
٩٠ – ٩٤	٨	٩٣	٠,٨	٠,٩٣
٩٤ – ٩٨	٧	١٠٠	٠,٧	١,٠٠٠
	١٠٠		١	

(ج) المتوسط الحسابي = ٨١,٦٤ وحدة، الوسيط = ٨٢، المنوال = ٨٣

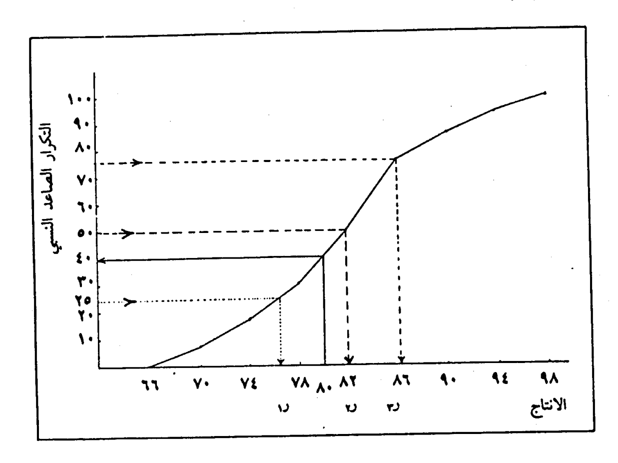
(د) المدى = ٣٣، الانحراف الربيعي = $\frac{ر٣ - ر١}{٢} = \frac{٨٦ - ٧٦,٣}{٢} = ٤,٨$

التباين = ٥٦,٩٩٠، الانحراف المعياري = ٧,٥٥

معامل الاختلاف = σ ÷ س̄ = ٧,٥٥ ÷ ٨١,٦٤ = ٠,٠٩٢

(هـ) الرتبة المئينية للانتاج ٨٠ = $\frac{١٠٠}{١٠٠}$ [٣٠ + $\frac{٨٠ - ٧٨}{٤}$ × ٢٠] = ٤٠

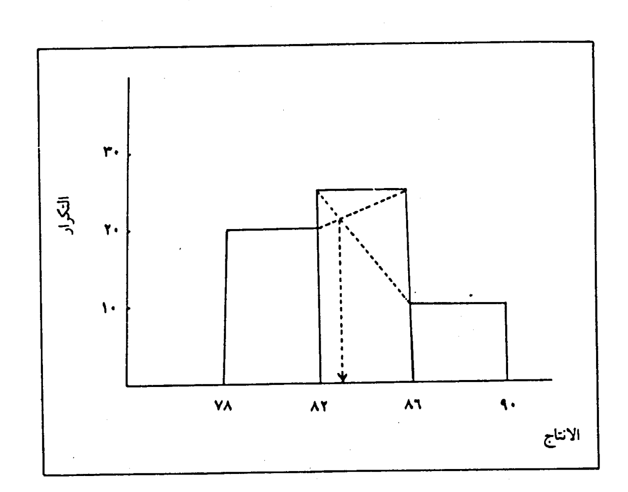
(و)



الربيع الأول (ر١) = ٧٦,٥، الربيع الثاني (ر٢) وهو الوسيط = ٨٢ والربيع الثالث (ر٣) = ٨٦

الرتبة المثينية المناظرة للانتاج ٨٠ هي ٤٠

(ز) المنوال = ٨٣



(ج) الدرجة المعيارية $\text{س}' = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\sigma} = \frac{٩٠ - ٨١,٦٤}{٧,٥٥} = ١,١٠٧$

٣ – في دراسة لعدد الأولاد بالأسرة في إحدى القرى، تم الحصول على البيانات التالية:

عدد الأولاد	صفر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
عدد الأسر	٦٠	١٠٠	١٧٠	١٨٠	٢٠٠	١٦٠	١٠٠	٣٠

أوجد:

(أ) المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

(ب) المدى والانحراف الربيعي.

(ج) التباين والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف.

□ الحل:

س	ك	س ك	س^{2}ك	التكرار الصاعد
صفر	٦٠	صفر	صفر	٦٠
١	١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٦٠
٢	١٧٠	٣٤٠	٦٨٠	٣٣٠
٣	١٨٠	٥٤٠	١٦٢٠	٥١٠
٤	٢٠٠	٨٠٠	٣٢٠٠	٧١٠
٥	١٦٠	٨٠٠	٤٠٠٠	٨٧٠
٦	١٠٠	٦٠٠	٣٦٠٠	٩٧٠
٧	٣٠	٢١٠	١٤٧٠	١٠٠٠
	١٠٠٠	٣٣٩٠	١٤٦٧٠	

(أ) $\bar{س} = \frac{مجـ س ك}{ن} = \frac{٣٣٩٠}{١٠٠٠} = ٣,٣٩$

ترتيب الوسيط = $\frac{١٠٠٠}{٢}$ = ٥٠٠، الوسيط = ٣

المنوال = ٤

(ب) المدى = ٧ - صفر = ٧

الانحراف الربيعي = $\frac{٥ - ٢}{٢}$ = ١,٥

(ج) $\sigma^2 = \frac{١}{١٠٠٠} [١٤٦٧٠ - \frac{(٣٣٩٠)^2}{١٠٠٠}] = ٣,١٧٨$

$\sigma = \sqrt{٣,١٧٨} = ١,٧٨٣$

معامل الاختلاف = $\frac{\sigma}{\bar{س}} = \frac{١,٧٨٣}{٣,٣٩} = ٠,٥٢٦$

□ □ □

٤ – لمجموعة القيم ١٥، ٧، ١، ٩ أوجد :

(أ) التباين

(ب) معامل الإختلاف

(جـ) الدرجات المعيارية

س	س²	سَ
١٥	٢٢٥	٥/٧
٧	٤٩	-٥/١
١	١	-٥/٧
٩	٨١	٥/١
٣٢	٣٥٦	

(أ) $\sigma^{2} = \frac{١}{\text{ن}} \left[\text{مجـ س}^{2} - \frac{(\text{مجـ س})^{2}}{\text{ن}} \right]$

$= \frac{١}{٤} \left[٣٥٦ - \frac{(٣٢)^{2}}{٤} \right] = ٢٥$

(ب) م. أ $= \frac{\sigma}{\bar{\text{س}}} = \frac{\sqrt{٢٥}}{٤,٣٢} = \frac{٥}{٨}$

(جـ) $\text{سَ} = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\sigma}$

$\text{سَ}_{١٥} = \frac{١٥ - ٨}{٥} = \frac{٧}{٥}$

$$٧' = \frac{٧ - ٨}{٥} = -\frac{١}{٥}$$

$$أ = \frac{١ - ٨}{٥} = -\frac{٧}{٥}$$

$$٩' = \frac{٩ - ٨}{٥} = \frac{١}{٥}$$

٥ – في دراسة مقارنة لمرتبات الموظفين تم إعداد التوزيعات التكرارية التالية والتي تعرض المرتب بالألف ريال، وعدد الموظفين كنسبة مئوية، وذلك لخريجي الطب، والهندسة، والإدارة، والإجتماع .

المرتب	الطب	الهندسة	الإدارة	الإجتماع
٢ – ٤	٥	١٠	٢٠	٤٠
٤ – ٦	١٠	٢٠	٥٠	٣٠
٦ – ٨	٢٥	٤٠	١٥	٢٠
٨ – ١٠	٤٠	٢٠	١٠	١٠
١٠ – ١٢	٢٠	١٠	٥	٠

والمطلوب إعداد جدول للمقارنة يحوي المؤشرات التالية :

(أ) المتوسط الحسابي (ب) الوسيط
(جـ) المنوال (د) المدى
(هـ) الربيع الأول (و) الربيع الثالث
(ز) الانحراف الربيعي (ح) الانحراف المعياري
(ط) معامل الاختلاف (ى) معامل الالتواء الأول لبيرسون

مقارنة مرتبات الموظفين

	الطب	الهندسة	الإدارة	الإجتماع
المتوسط الحسابي	٨,٢	٧	٥,٦	٥
الوسيـط	٨,٥	٧	٥,٢	٤,٦٧
المنــوال	٨,٩	٧	٤,٩	٣,٦
المــدى	١٠	١٠	١٠	٨
الربيع الأول	٦,٨	٥,٥	٤,٢	٣,٢٥
الربيع الثالث	٩,٧٥	٨,٥	٦,٦٧	٦,٥
الإنحراف الربيعي	١,٤٧٥	١,٥	١,٢٣	١,٦٣
الإنحراف المعياري	٢,١	٢,١٩	٢,١١	٢
معامل الإختلاف	٠,٢٥٦	٠,٣١٣	٠,٣٧٦	٠,٤
معامل الالتواء ل١	-٠,٣٣٣	صفـر	٠,٣٣٢	,٧

ألباب الثالث

مقاييس وصف العلاقة بين المتغيرات

الأهميـــة
هيكل دراسة العلاقة بين المتغيرات
التوزيع التكراري المزدوج
التوزيع التكراري النسبي

الباب الثالث
مقاييس وصف العلاقة بين المتغيرات

٣-١ الأهميـــــة

إن غاية العلم هي التحكم في الظواهر والأشياء والأحداث، وبذلك نحقق أقصى نفع أو عائد ممكن. وفي الأبواب السابقة قدمنا عدد من المؤشرات والمقاييس الإحصائية التي تهدف إلى وصف الظواهر، وهو شيء لا غنى عنه في سبيل هذا التحكم. وكان الوصف هناك يتعلق بمتغير أو ظاهرة واحدة مثل مستوى التحصيل العلمي للطلاب، مستوى الأجور أو الدخول، الكفاية الإنتاجية للعمال، البطالة، الجريمة،... الخ.

واستكمالًا لأعمال الوصف نعرض هنا لمقاييس على درجة كبيرة من الأهمية، وتتعلق بدراسة ووصف العلاقة بين المتغيرات .

ولتوضيح الفكرة نعرض للعلاقة المعروفة بين مساحة المربع وطول ضلعه، وهي :

مساحة المربع = مربع طول الضلع .

وبالعرض الرياضي نكتب :

$$ص = س^{٢}$$

حيث ص ترمز إلى مساحة المربع، س ترمز إلى طول الضلع أي أننا نصف العلاقة بين مساحة المربع وطول ضلعه بالصيغة الموضحة أعلاه، وهي ص = $س^{٢}$ ، وهذه الصيغة أو شكل العلاقة بين س، ص لها فائدة كبيرة وهي أننا نستخدمها في تحديد مساحة أي قطعة على شكل مربع بمجرد علمنا بطول الضلع – وهذا في حد ذاته أمر سهل. ولتقدير أهمية هذه العلاقة نسأل: كيف يمكنك تقدير مساحة قطعة أرض مربعة الشكل بدون علمك بهذه العلاقة ؟

وهناك الكثير من العلاقات المتواجدة بين المتغيرات، ففي العلوم الطبيعية، العلاقة بين مساحة الدائرة وقطرها، وبين قطرها ومحيطها، بين حجم الغاز وضغطه، بين الحرارة وتمدد المعادن،.. وفي علم الوراثة، نبحث في العلاقة بين طول الأب وطول الابن، بين ذكاء الأب وذكاء الابن، لون البشرة للأب ولونها للابن ...

وفي العلوم الطبية، العلاقة بين التدخين والإصابة بمرض معين، العمر وضغط الدم، علاقة مرض معين أو توزيعه حسب السن أو الجنس ..

وفي العلوم الاجتماعية، يهتم الباحثون على سبيل المثال بالعلاقة بين الطبقة الاجتماعية وبين مستوى الدخل، درجة التعليم، ونوع الوظيفة ... العلاقة بين التحصيل الدراسي وبين مستوى الذكاء، المستوى الاجتماعي والاقتصادي، المستوى التعليمي للوالدين، وكذا للعلاقة بين الجريمة والبطالة وهكذا بينها وبين مستوى الدخل، كثافة السكان وكذا العلاقة بين إنتاجية العامل وبين أجره، ظروف معيشته، عمره، مدة خبرته، وفي العلوم الاقتصادية، يهتم الباحثون بالعلاقة بين الدخل والاستثمار بين سعر السلعة والطلب عليها، بين المحصول الزراعي ومعدل سقوط المطر، بين الدخل القومي وعدد السكان،.. وفي العلوم الإدارية يهتم المسؤولون ببحث العلاقة بين المبيعات والأرباح، بين حجم الإنتاج وتكلفة الوحدة، بين حجم المبيعات والإعلان... الخ .

٣-٢ هيكل دراسة العلاقة بين المتغيرات :

ودراسة العلاقة بين المتغيرات تحوي نوعين من الدراسة : الارتباط والتقدير وسيتم تخصيص فصل مستقل لعرض كل موضوع منهما .

وعند دراسة العلاقة بين المتغيرات يراعى التمييز حسب العوامل التالية :

أولًا – مستوى القياس : حيث يتم التمييز بين الحالات التالية :

١ – المتغيرات الكمية (المستوى الفتري والنسبي) .

٢ – المتغيرات الترتيبية .

٣ – المتغيرات الإسمية .

ثانياً – عدد المتغيرات : وهنا يتم التمييز بين :

١ – حالة دراسة العلاقة بين متغيرين فقط .

٢ – حالة دراسة العلاقة بين عدة متغيرات .

وسنعرض في هذا الكتاب الحالة البسيطة وهي العلاقة بين متغيرين فقط .

وهذه الدراسة تعد الأساس لدراسة العلاقة بين عدة متغيرات – فهي لا تعد كافية في حد ذاتها في الكثير من الحالات . فالكثير من المتغيرات يلزم وصفها – سواء تعلق الأمر بالإرتباط أو التقدير – في ضوء عدة متغيرات وليس متغير واحد . ولنأخذ مثالًا على ذلك مساحة المستطيل، فهي تعتمد على متغيران الطول والعرض، فلا يكفي وصف الإرتباط بين المساحة والطول فقط – كما أن تقدير مساحة المستطيل يتطلب معرفة شكل العلاقة بين المساحة والطول والعرض .

ومثال آخر حجم السكان في مدينة أو بلد معين فهو يعتمد على عدة متغيرات هي المواليد والوفيات والهجرة الداخلية والخارجية .

ومثال آخر معدل الجريمة في مجتمع معين نجده يتوقف على عدة متغيرات منها حجم هذا المجتمع، معدل البطالة، درجة التدين .

٣-٣ التوزيع التكراري المزدوج :

في هذا التوزيع يتم تنظيم البيانات المتعلقة بمتغيرين في وقت واحد، وذلك بهدف وصف العلاقة القائمة بين هذين المتغيرين .

تطبيق ١ :

فيما يلي بيانات ثلاثين عاملاً. ويمثل أحد المتغيرين أجر العامل في اليوم، والمتغير الآخر يمثل إنتاج ذلك العامل. والمطلوب إعداد توزيع تكراري من خمس فئات منتظمة .

الأجر	الإنتاج	الأجر	الإنتاج	الأجر	الإنتاج	الأجر	الإنتاج	الأجر	الإنتاج
٤١	٨٣	٣٥	٨٢	٦٠	٩٠	٥٠	٩٢	٦٧	١٠٣
٦٠	٨٦	٦٢	٩٣	٤٧	٨١	٧٣	١٠٠	٧٧	١٠٢
٧٥	٩٣	٦٤	٨٨	٧٨	٩٦	٥٠	٨٢	٦٨	٩٢
٦٦	٩١	٣١	٨٧	٤٢	٨٩	٧٠	٩٩	٧٩	٩٤
٦٥	٩٥	٥٩	٩٣	٥٥	٩٧	٥٧	٨٨	٥٧	٩٠
٤٣	٨٧	٦٧	٩٨	٥٩	٨٥	٦٨	٨٩	٦٩	٩٤

□ الحل:

يتم تفريغ البيانات في كشف مزدوج أولاً تدون فيه العلامات، ونبدأ أولاً بتحديد طول الفئة.

الإنتاج / الأجر	٨٠ – ٨٥	٨٥ – ٩٠	٩٠ – ٩٥	٩٥ – ١٠٠	١٠٠ – ١٥٠
٣٠ – ٤٠	/	/			
٤٠ – ٥٠	//	//			
٥٠ – ٦٠	/	//	///	/	
٦٠ – ٧٠		///	////	//	/
٧٠ – ٨٠			//	//	//

الأجر \ الإنتاج	٨٠ ـ ٨٥	٨٥ ـ ٩٠	٩٠ ـ ٩٥	٩٥ ـ ١٠٠	١٠٠ ـ ١٠٥	المجموع
٣٠ ـ ٤٠	١	١				٢
٤٠ ـ ٥٠	٢	٢				٤
٥٠ ـ ٦٠	١	٢	٣	١		٧
٦٠ ـ ٧٠		٣	٥	٢	١	١١
٧٠ ـ ٨٠			٢	٢	٢	٦
المجموع	٤	٨	١٠	٥	٣	٣٠

$$\text{طول الفئة بالنسبة لتوزيع الأجور} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}}$$

$$= \frac{٧٩ - ٣١}{٥} = ٩,٦$$

ويكون طول الفئة المناسب يساوي عشرة.

$$\text{طول الفئة بالنسبة لتوزيع الإنتاج} = \frac{١٠٣ - ٨١}{٥} = ٤,٤$$

ويمكن اعتبار طول الفئة المناسب يساوي خمسة.

وبعد ذلك نقوم بتحديد التكرارات وذلك باستخدام العلامات، حيث نبدأ بأزواج القيم بالترتيب، ونضع علامة لكل زوج مقابل فئتي الأجر والإنتاج المناظرتين. فمثلاً الزوج الأول وهو (٤١، ٨٣)، نخصص له علامة أمام فئة الأجر ٤٠ ـ ٥٠ وتحت فئة الإنتاج ٨٠ ـ ٨٥، والزوج الثاني وهو (٦٠، ٨٦)

نخصص له علامة أمام فئة الأجر ٦٠ – ٧٠ وتحت فئة الإنتاج ٨٥ – ٩٠ ، وهكذا حتى ننتهي إلى الزوج الأخير وهو (٦٩ – ٩٤) ويلاحظ ما يلي :

(١) الجدول التكراري المزدوج يتكون من مجموعة من الصفوف ومجموعة من الأعمدة . وهي بقدر عدد فئات المتغير المتناظر، والجدول في التطبيق السابق يحوي خمس صفوف وخمس أعمدة .

(٢) قلب الجدول يتكون من مجموعة من الخلايا تحوي التكرارات المزدوجة، فمثلًا الرقم ٥ الموجود بالصف الرابع والعمود الثالث يعني أن هناك ٥ عمال أجورهم تقع في الفئة ٦٠–٧٠ وإنتاجهم يقع في الفئة ٩٠–٩٥ .

(٣) الجدول يحوي عدد من التوزيعات التكرارية لمتغيرات وحيدة. فالتوزيع التكراري للأجور فئاته موجودة على يمين الجدول والتكرار هو العمود الأخير من الجدول المزدوج. وكذلك فإن التوزيع التكراري للإنتاج فئاته موجودة في الصف العلوي من الجدول وتكرارته في الصف الأخير وأكثر من ذلك يمكن النظر إلى كل صف ولكل عمود مع الفئات المناظرة – وكأنه جدول تكراري مستقل. فمثلًا لو أردنا الحصول على توزيع تكراري لإنتاج مجموعة العمال ذوي الأجور المرتفعة (أي الفئة ٧٠–٨٠) فإنه يظهر كما يلي :

الإنتـــاج	٩٠–٩٥	٩٥–١٠٠	١٠٠–١٠٥
التكـــرار	٢	٢	٢

(٤) يمكن استنتاج طبيعة الإرتباط بصورة تقريبية من الجدول التكراري المزدوج، وبالنظر إلى الجدول التكراري المزدوج السابق يمكن القول بأنه كلما زاد إنتاج العامل زاد أجره، ويمكن استنتاج ذلك من درجة تجمع التكرارات حول القطر الذي يبدأ من أعلى اليمين (لاحظ أن المتغيرات مرتبة تصاعدياً) .

٣-٤ التوزيع التكراري النسبي :

لمزيد من الإيضاح يتم عرض التكرارات في صورة نسبية وذلك بنسبتها إلى أساس معين. وفي حال الجداول المزدوجة يكون من المفيد عرض التكرارات النسبية بالصورة التالية :

(أ) نسبة كل التكرارات بالجدول إلى المجموع الكلي للتكرارات .

(ب) نسبة التكرارات بكل صف إلى مجموع تكرارات الصف .

(جـ) نسبة التكرارات بكل عمود إلى مجموع تكرارات العمود .

وبذلك يمكن عرض ثلاثة نسب بكل خلية .

تطبيـق ٢ :

في دراسة للعلاقة بين التحصيل العلمي والغياب قام باحث تربوي بجمع البيانات التالية وهي توضح العلاقة بين درجة الطالب في إحدى المقررات ونسبة حضوره فيها .

والمطلوب إعداد توزيع تكراري مزدوج .

الدرجة	نسبة الحضور	الدرجة	نسبة الحضور	الدرجة	نسبة الحضور	الدرجة	نسبة الحضور	الدرجة	نسبة الحضور
٧٠	٩٢	٥٥	٧٩	٥١	٨٢	٤٢	٨٥	٥٧	٨٣
٤٥	٧٩	٦٠	٨٤	٤٧	٨٢	٦٣	٨٦	٥٣	٨٤
٣٣	٧٥	٦٥	٨٧	٣٩	٨٠	٨٢	٩٥	٥٥	٨٨
٦٤	٨٥	٥٨	٨٣	٦١	٨٨	٦٥	٩١	٤٢	٧٧
٥٠	٨١	٥٢	٨٢	٥٣	٧٩	٤٥	٨٠	٥٥	٨٢
٢٥	٨٠	٣٦	٧٩	٥٩	٨٥	٦٣	٩٠	٣٩	٧٩
٦٥	٨٨	٤٥	٨٠	٤٩	٨٦	٥٤	٨٣	٦٤	٨٥
٧٥	٨٩	٤٢	٨٣	٤١	٧٩	٥٢	٨٦	٧٨	٨٨
٣٠	٧٦	٣٥	٧٨	٢٥	٧٦	٤٨	٨٣	٢٦	٧٥
٢٠	٧٧	٤٠	٨٥	٥٥	٨٢	٤٦	٧٩	٨٨	٩٢

○ **الحـــل** : راجع التطبيق ١ بالفصل ٢-١

عدد الفئات = ٧ من قاعدة ستورج

طول الفئة .

الدرجات = $\frac{٨٨-٢٠}{٧} = \frac{٦٨}{٧} \approx ١٠$

نسبة الغياب = $\frac{٩٥-٧٥}{٧} = \frac{٢٠}{٧} \approx ٣$

وبتوسيط العلامات كما سبق، نصل إلى التوزيع التكراري المزدوج التالي :

نسبة الحضور / الدرجات	٧٥-٧٨	٧٨-٨١	٨١-٨٤	٨٤-٨٧	٨٧-٩٠	٩٠-٩٣	٩٣-٩٦	التكرار
٢٠-٣٠	٣	١						٤
٣٠-٤٠	٢	٤						٦
٤٠-٥٠	١	٥	٣	٣				١٢
٥٠-٦٠		٢	٨	٣	١			١٤
٦٠-٧٠				٤	٣	٢		٩
٧٠-٨٠					٢	١		٣
٨٠-٩٠						١	١	٢
التكرار	٦	١٢	١١	١٠	٦	٤	١	٥٠

تطبيقات الفصل ٣ – ٣

٣ – في دراسة العلاقة بين مستوى التعليم (س) والأجر الشهري (ص) بالألف ريال – تم جمع البيانات التالية في أحد المجتمعات .

والمطلــوب :

إعداد توزيع تكراري مزدوج من ثلاث فئات

س	ص	س	ص	س	ص	س	ص	س	ص
ثانوي	٧	جامعي	٩	ثانوي	٨	متوسط	٥	ثانوي	٧
جامعي	٨	متوسط	٢	متوسط	٣	متوسط	٧	جامعي	٨
متوسط	٦	متوسط	٤	متوسط	٩	ثانوي	٦	متوسط	١٢
ثانوي	٩	ثانوي	٣	جامعي	١٣	متوسط	٤	متوسط	٤

□ الحــل :

طول الفئة ص = $\frac{١٣-٢}{٣} = \frac{١١}{٣} \approx ٤$

ص الأجر / س مستوى التعليم	٢ – ٦	٦ – ١٠	١٠ – ١٤	
متوسـط	٦	٣	١	١٠
ثانــوي	١	٥		٦
جامعـــي		٣	١	٤
	٧	١١	٢	٢٠

٤ – في دراسة للعلاقة بين التدريب والإنتاج، تم سحب عينة من العاملين الذين تم تدريبهم، والبيانات التالية توضح عدد ساعات التدريب لكل عامل وإنتاجه .

والمطلـــوب : إعداد توزيع تكراري مزدوج من ثلاث فئات منتظمة .

ساعات التدريب	الإنتاج	ساعات التدريب	الإنتاج	ساعات التدريب	الإنتاج
١٤	٩	١٦	٩	١٢	٨
١٨	١١	١٧	١٢	٢١	١٢
١٢	١١	١٠	٨	١١	٧
١٥	١٠	٢٢	١١	٢٠	١٤
١٣	٨	٢١	١٥	١٩	١٢
١٢	٩	٢٤	١٣	١٧	١١
٢٣	١١	٢٠	١١		

□ **الحـــل :**

الإنتاج / ساعات التدريب	٧-١٠	١٠-١٣	١٣-١٦	
١٠ – ١٥	٦	١	٠	٧
١٥ – ٢٠	١	٥	٠	٦
٢٠ – ٢٥	١	٤	٢	٧
	٨	١٠	٢	٢٠

٥ – في دراسة للعلاقة بين دخل الإبن ودخل الأب تم جمع البيانات الموضحة أدناه (القيم بالألف ريال) .

والمطلوب إعداد توزيع تكراري مزدوج من ثلاث فئات منتظمة .

دخل الابن	دخل الأب	دخل الابن	دخل الأب	دخل الابن	دخل الأب
٧	٩	١٣	١٩	٣	٨
١٢	٧	٧	١٢	١٠	١١
١٣	٦	٥	٤	١٠	١٤
٩	١٨	٨	٤	١٢	١٥
١١	٢٠	٩	١٥	١٣	٢١
٨	١٠	١١	٤	٩	٧
١٤	١٣	٨	١٤		

□ الحـــل :

طول الفئـــة :

$$\text{دخل الابن} = \frac{١٤ - ٣}{٣} = \frac{١١}{٣} \approx ٤$$

$$\text{دخل الأب} = \frac{٢١ - ٤}{٣} = \frac{١٧}{٣} \approx ٦$$

دخل الأب / دخل الابن	٤ – ١٠	١٠ – ١٦	١٦ – ٢٢	
٣ – ٧	٢			٢
٧ – ١١	٣	٦	١	١٠
١١ – ١٥	٣	٢	٣	٨
	٨	٨	٤	٢٠

٦ – البيان التالي يوضح عدد المتهمين وعدد المحكوم عليهم في عدة مجتمعات في فترة معينة . والمطلوب إعداد توزيع تكراري مزدوج من ثلاث فئات منتظمة .

المتهمين	المحكوم عليهم	المتهمين	المحكوم عليهم
١٨٠	١٢٠	٢٣٥	١٩٠
٣٥٠	١١٠	٣٣٠	٢٦٣
١٥٠	٩٠	١٩٨	١٨٠
٣٤٠	١١٥	١٢٠	٦٠
٢٢٠	١٦٠	٣٩٦	٨٥
٢٣٧	١٥٠	١٧٠	٩٣
١٠٠	٨٠	٢٧٠	١٤٠
٣١٠	٧٠		

□ الحـــل :

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{أكبر قيمة – أصغر قيمة}}{\text{عدد الفئات}}$$

$$\text{بالنسبة لعدد المتهمين} = \frac{٣٩٦-١٠٠}{٣} = \frac{٢٩٦}{٣} = ٩٩ \approx ١٠٠$$

$$\text{بالنسبة لعدد المحكوم عليهم} = \frac{٢٦٣-٦٠}{٣} = \frac{٢٠٣}{٣} = ٦٧,٧ \approx ٧٠$$

وبتوسيط العلامات يكون التوزيع المزدوج كما يلي :

المحكوم عليهم / المتهمين	٦٠-١٣٠	١٣٠-٢٠٠	٢٠٠-٢٧٠
١٠٠-٢٠٠	٥	١	
٢٠٠-٣٠٠		٤	
٣٠٠-٤٠٠	٤		

٧ – في دراسة للمكتبات العامة – تم جمع البيانات التالية وهي توضح رصيد الكتب في المكتبة وعدد السكان بالمنطقة التي تخدمها (بالألف) .

والمطلـوب : إعداد توزيع تكراري مزدوج من ثلاثة فئات منتظمة .

رصيد المكتبة	عدد السكان	رصيد المكتبة	عدد السكان	رصيد المكتبة	عدد السكان
٨٠	٣٢٠	٧٥	٣٥٠	٨٥	٤٢٠
٦٥	٤٥٠	١٠٥	٥٩٠	١٠٨	٤٨٠
٥٠	٣١٠	٥٥	٣٠٠	٦٠	٣٥٠
٩٥	٥٣٠	٩٥	٤١٠	٧٥	٤٧٠
٥٨	٣٧٠	١٠٥	٤٣٠	٥٧	٣٢٠
٧٠	٤٣٠	٨٥	٣٤٠	٧٣	٤٥٠
٧٣	٤٧٠	٨٧	٤٦٠	٧٢	٣٩٠

☐ **الحـــل :**

طول الفئة : رصيد المكتبة = $\frac{١٠٨-٥٠}{٣} = \frac{٥٨}{٢} \approx ٢٠$

عدد السكان = $\frac{٥٩٠-٣٠٠}{٣} = \frac{٢٩٠}{٣} \approx ١٠٠$

رصيد المكتبة \ عدد السكان	٣٠٠–٤٠٠	٤٠٠–٥٠٠	٥٠٠–٦٠٠
٥٠–٧٠	~~////~~	/	
٧٠–٩٠	////	~~////~~ /	
٩٠–١١٠		///	//

عدد السكان / رصيد المكتبة	٣٠٠-٤٠٠	٤٠٠-٥٠٠	٥٠٠-٦٠٠	
٥٠-٧٠	٥	١		٦
٧٠-٩٠	٤	٦		١٠
٩٠-١١٠		٣	٢	٥
	٩	١٠	٢	٢١

الباب الرابع

مقاييس الإرتباط

Measures of Correlation

مقـدمــة

- الأهميـــــة
- تصنيف مقاييس الإرتباط

الإرتباط بين متغيران كميان

- معامل ارتباط بيرسون

الإرتباط بين متغيران ترتيبيان

- معامل سبيرمان
- معامل جاما
- معامل كندال

الإرتباط بين متغيران إسميان

- معامل كرامير
- معامل لامـدا
- معامل الإرتباط الرباعي

الإرتباط بين متغير كمي ومتغير إسمي

- معامل ارتباط السلسلتان
- معامل ارتباط السلسلتان الثنائي
- نسبة الإرتباط

الإرتباط بين متغير ترتيبي ومتغير إسمي

- معامل ارتباط السلسلتان للرتب
- معامل ثيتا

الباب الرابع

مقاييس الإرتباط

٤-١ مقدمــة

٤-١-١ الأهميــة :

تهدف مقاييس الإرتباط لوصف درجة التغير الاقتراني بين المتغيرات وتفيد في :

(١) تحديد قوة الإرتباط بين المتغيرين، أي بيان ما إذا كان الإرتباط قوي، ضعيف، منعدم .

(٢) تحديد اتجاه العلاقة بين المتغيرين، أي بيان ما إذا كانت العلاقة طردية أم عكسية .

(٣) إن دراسة الإرتباط تعد الأساس لدراسة وتحليل علاقات السببية Causal relation .

(٤) تعطي مؤشرات لإمكان تقدير المتغيرات بدلالة أخرى .

(٥) تعد مقاييس الإرتباط من المؤشرات الهامة في قياس الصدق والثبات والموضوعية، لما له من أهمية كبيرة للتأكد من سلامة الاختبارات وإجراءات جمع البيانات .

٤-١-٢ تصنيف مقاييس الإرتباط :

وكما ذكرنا فإنه سيتم عرض مقاييس الارتباط بين متغيرين فقط، والجدول التالي يعرض مجموعة مقاييس الإرتباط مقسمة حسب مستويات القياس، لتكون مرشداً للباحث في اختيار المقياس المناسب .

مقاييس الإرتباط بين متغيرين

س / ص	كمي	ترتيبي	إسمي
كمي	ر		رً رً. ى
ترتيبي		رَ جا تو	رً≠ θ
إسمي			ق ل ر+

ر معامل إرتباط بيرسون
رً معامل إرتباط السلسلتان
رً. معامل إرتباط السلسلتان الثنائي
ى نسبة الإرتباط
رَ معامل سبيرمان
جا معامل جاما
تو معامل كندال
رً≠ معامل ارتباط السلسلتان للرتب
θ معامل ثيتا
ق معامل كرامير
ل معامل لامدا
ر+ معامل الإرتباط الرباعي

٤-٢ الإرتباط بين متغيران كميان :

في دراسة العلاقة بين المتغيرات الرقمية (المقياس الفتري والنسبي) نميز بين حالتين :

١ - إفتراض علاقة خطية بين المتغيرين .

٢ - إفتراض علاقة غير خطية بين المتغيرين .

٤-٢-١ العلاقة الخطية :

من الإفتراضات المناسبة عملياً حالة افتراض علاقة خطيـة بين المتغيرين .
فإذا كان لدينا متغيران س ، ص فإن العلاقة الخطية تكون على الصورة :

ص = أ + ب س

حيث أ ، ب ثوابت .

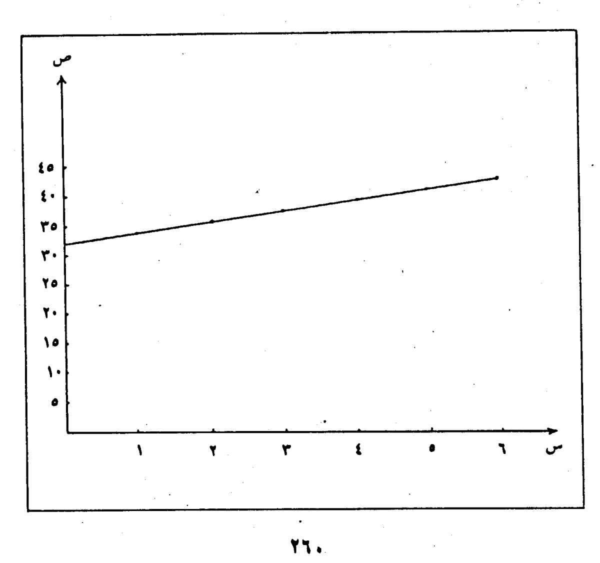
ولتوضيح ذلك، نعرض للعلاقة بين درجة الحرارة فهرنهيت، ولتكن (ص) ودرجة الحرارة المئوية ولتكن (س) . إن العلاقة بينهما هي على الصورة :

ص = ٣٢ + ١,٨ س

فإذا كانت درجة الحرارة المئوية (س) = صفر فإن درجة الحرارة فهرنهيت تساوي ٣٢ + ١,٨ (صفر) = ٣٢ . وإذا كانت س = ٣ فإن ص = ٣٢ + ١,٨ (٣) = ٣٧,٤ ويمكن عرض الجدول التالي لتوضيح العلاقة بين س ، ص .

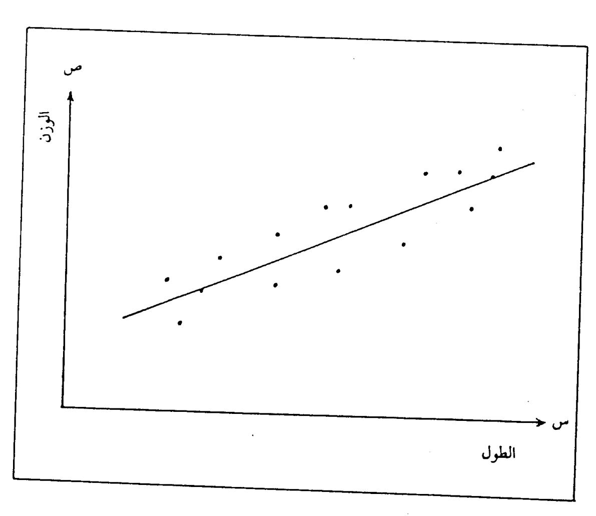
س درجة مئوية	ص درجة فهرنهيت
صفر	٣٢
١	٣٣,٨
٢	٣٥,٦
٣	٣٧,٤
٤	٣٩,٢
٥	٤١
٦	٤٢,٨

وهذه العلاقة بين س،ص إذاما تم تمثيلها بيانياً نجدها كما في الشكل التالي:



ويلاحظ أنها علاقة خطية حيث يمثلها خط مستقيم. ويلاحظ أيضاً أن النقاط (س،ص) تقع جميعها على خط مستقيم. وفي هذه الحالة نقول أن هناك ارتباط تام بين المتغيرين. ويلاحظ أيضاً أن المتغير (ص) يتزايد بزيادة المتغير (س). ويقال في هذه الحالة أن هناك علاقة طردية (أو موجبة) بين المتغيرين.. أما إذا كان أحد المتغيرين يتناقص كلما زاد المتغير الآخر فإننا نقول أن هناك علاقة عكسية (أو سالبة) بين المتغيرين، مثال ذلك العلاقة بين سعر السلعة والطلب عليها، تكلفة الوحدة المنتجة وحجم الإنتاج.

على أنه يلاحظ أن الارتباط قد لا يكون تاماً، وهذا ما نلاحظه خاصة بين الظواهر الاقتصادية والاجتماعية. وفي هذه الحالات فإن النقاط (س،ص) لا تقع جميعها على خط مستقيم. فإذا كنا بصدد دراسة العلاقة بين أطوال مجموعة من الأشخاص (س) وأوزانهم (ص) فإن شكل انتشار النقاط (س،ص) قد يكون كما يلي:



ومن الشكل يلاحظ أنه على الرغم من ان النقاط (س،ص) لا تقع جميعها على خط مستقيم، فإنه يمكن الافتراض ــ بوجود علاقة خطية ــ وتوفيق خط مستقيم لتمثيل العلاقة بين المتغيرين كما يتضح بالشكل.

ودراسة الارتباط تهدف إلى:

(أ) تحديد درجة أو قوة العلاقة بين المتغيرين.

(ب) تحديد إتجاه العلاقة، هل هي علاقة طردية (موجبة) أو عكسية (سالبة).

(ج) إذا ما تأكدنا من قوة العلاقة بين المتغيرين، يمكن تقدير قيمة أحد المتغيرين بدلالة قيمة المتغير الآخر.

٤-٢-٢ معامل إرتباط بيرسون :

يتم قياس الارتباط الخطي بين متغيرين عن طريق معامل الارتباط (بيرسون) ويعرف معامل الارتباط (ر) بين المتغيرين س،ص كما يلي:

$$ر = \frac{١}{ن} \sum س' ص' \qquad (٤-١)$$

حيث: س' هي الدرجات المعيارية للمتغير س
ص' هي الدرجات المعيارية للمتغير ص
ن عدد القيم

وبعبارة اخرى فإن معامل الارتباط لمتغيرين س،ص هو المتوسط الحسابي لحواصل ضرب قيمهما المعيارية.

ويلاحظ أن صيغة معامل الارتباط المذكورة أعلاه هي صيغة تعريفية وليست الصيغة المناسبة من الناحية الحسابية حيث أنها تتطلب إيجاد الدرجات المعيارية لكلا المتغيرين وكما نعلم فإن:

$$س' = \frac{س - \bar{س}}{\sigma_{س}}$$

$$ص' = \frac{ص - \bar{ص}}{\sigma_{س}}$$

أي أنه لا بد من إيجاد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكلا المتغيرين. وعلى أي حال فإن صيغة معامل الارتباط يمكن تحويلها إلى الصيغة المناسبة التالية:

$$ر = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - مجـ\ س\ مجـ\ ص}{\sqrt{[ن\ مجـ\ س^{2} - (مجـ\ س)^{2}]\ [ن\ مجـ\ ص^{2} - (مجـ\ ص)^{2}]}} \qquad (٤-٢)$$

وهذه الصيغة أفضل كثيراً وتبسط من العمليات الحسابية المطلوبة، حيث يمكن التعويض في هذه الصيغة بمجرد حساب القيم $س^{٢}$، $ص^{٢}$، س ص.

خواص معامل الارتباط:

(أ) لا تتأثر قيمة معامل الارتباط إذا ما تم تحويل أي أو كلا المتغيرين س، ص إلى متغيرات أخرى، عن طريق طرح رقم ثابت أو عن طريق القسمة على رقم ثابت.

(ب) معامل الارتباط، تنحصر قيمته بين -١، +١

فإذا كانت ر = ١ فإن ذلك يعني وجود علاقة تامة موجبة، ثم تنقص تدريجياً كلما بعدت قيمة ر عن ١ حتى تصل إلى صفر، حيث لا توجد علاقة.

وإذا كانت قيمة ر = -١ فإن ذلك يعني وجود علاقة تامة سالبة.

ولا توجد حدود عامة لتفسير قيمة معامل الارتباط بين القيمتين صفر، +١ (وبالمثل بين صفر، -١) وعلى أي حال يمكن الاسترشاد بما يلي:

صفر إلى ٠,٣	قدر ضئيل من الارتباط يمكن إهماله
٠,٣ إلى ٠,٥	منخفض
٠,٥ إلى ٠,٧	ارتباط متواضع
٠,٧ إلى ٠,٩	قوي
٠,٩ إلى ١	قوي جداً

وبالمثل تفسر القيم السالبة لمعامل الارتباط.

☐ **مثال ١ :**

الجدول التالي يوضح درجات الحرارة المئوية والقيم المناظرة لها من درجات الحرارة فهرنهيت. والمطلوب إيجاد معامل الارتباط بينهما.

س درجة مئوية	صفر	١	٢	٣
ص فهرنهيت	٣٢	٣٣,٨	٣٥,٦	٣٧,٤

☐ **الحل:**

س	ص	$س^2$	$ص^2$	س ص
صفر	٣٢	صفر	١٠٢٤	صفر
١	٣٣,٨	١	١١٤٢,٤٤	٣٣,٨
٢	٣٥,٦	٤	١٢٦٧,٣٦	٧١,٢
٣	٣٧,٤	٩	١٣٩٨,٧٦	١١٢,٢
٦	١٣٨,٨	١٤	٤٨٣٢,٥٦	٢١٧,٢

$$ر = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - مجـ\ س\ مجـ\ ص}{\sqrt{[ن\ مجـ\ س^2 - (مجـ\ س)^2][ن\ مجـ\ ص^2 - (مجـ\ ص)^2]}}$$

$$= \frac{٤(٢١٧,٢) - (٦)(١٣٨,٨)}{\sqrt{[٤(١٤) - (٦)^2][٤(٤٨٣٢,٥٦) - (١٣٨,٨)^2]}}$$

$$= \frac{٣٦}{\sqrt{[٢٠][٦٤,٨]}} = ١$$

أي أن معامل الارتباط يساوي واحد صحيح وهذا ما يجب توقعه، حيث أن الارتباط تام بين درجات الحرارة المئوية والدرجات فهرنهيت.

□ **مثال ٢ :**

في دراسة للعلاقة بين انتاجية العامل وعدد ساعات العمل تم جمع البيانات التالية من إحدى الشركات، حيث س يمثل عدد ساعات العمل، ص يمثل معدل الانتاج في الساعة. بين ما إذاكانت هناك علاقة بين المتغيرين.

جدول رقم (١٨)

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
ص	١٠٠	٩٩	٩٧	٩٤	٩٠	٨٥	٨٠

س	ص	$\text{س}^{٢}$	$\text{ص}^{٢}$	س ص
١	١٠٠	١	١٠٠٠٠	١٠٠
٢	٩٩	٤	٩٨٠١	١٩٨
٣	٩٧	٩	٩٤٠٩	٢٩١
٤	٩٤	١٦	٨٨٣٦	٣٧٦
٥	٩٠	٢٥	٨١٠٠	٤٥٠
٦	٨٥	٣٦	٧٢٢٥	٥١٠
٧	٨٠	٤٩	٦٤٠٠	٥٦٠
٢٨	٦٤٥	١٤٠	٥٩٧٧١	٢٤٨٥

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}][\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}]}}$$

$$= \frac{\text{٧(٢٤٨٥)} - \text{(٢٨)(٦٤٥)}}{\sqrt{[\text{٧(١٤٠)} - \text{(٢٨)}^{٢}][\text{٧(٥٩٧٧١)} - \text{(٦٤٥)}^{٢}]}}$$

$$= \frac{\text{١٧٣٩٥} - \text{١٨٠٦٠}}{\sqrt{[\text{٩٨٠} - \text{٧٨٤}][\text{٤١٨٣٩٧} - \text{٤١٦٠٢٥}]}} = -\text{٠,٩٧٥}$$

وذلك يعني أن هناك ارتباط سالب قوي جداً، يكاد يكون تام بين المتغيرين.

□ **مثال ٣ :**

الآتي درجات اختبارين س، ص لمجموعة من الطلبة. أوجد معامل الارتباط بينهما.

جدول رقم (١٩)

س	٢	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٤
ص	٤	٨	١٢	٢٤	٢٨	٣٢	٣٢	٣٦	٤٠

□ **الحل:**

س	ص	س^2	ص^2	س ص
٢	٤	٤	١٦	٨
٢	٨	٤	٦٤	١٦
٤	١٢	١٦	١٤٤	٤٨
٦	٢٤	٣٦	٥٧٦	١٤٤
٨	٢٨	٦٤	٧٨٤	٢٢٤
١٠	٣٢	١٠٠	١٠٢٤	٣٢٠
١٢	٣٢	١٤٤	١٠٢٤	٣٨٤
١٤	٣٦	١٩٦	١٢٩٦	٥٠٤
١٤	٤٠	١٩٦	١٦٠٠	٥٦٠
٧٢	٢١٦	٧٦٠	٦٥٢٨	٢٢٠٨

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2][\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2]}}$$

$$= \frac{\text{٩(٢٢٠٨)} - \text{(٧٢)(٢١٦)}}{\sqrt{[\text{٩(٧٦٠)} - \text{(٧٢)}^2][\text{٩(٦٥٢٨)} - \text{(٢١٦)}^2]}}$$

$$= \frac{\text{٤٣٢٠}}{\sqrt{\text{(١٦٥٦)(١٢٠٩٦)}}} = \text{٠,٩٦٥}$$

أي أنه يوجد ارتباط قوي موجب بين المتغيرين س، ص.

٤-٢-٣ القيم المبوبة :

الصيغة السابقة لمعامل بيرسون تستخدم في حالة القيم غير المبوبة وتناسب الحالات التي يكون فيها عدد القيم قليلًا. ولكن في حالة التعامل مع عدد كبير من القيم يكون من الأنسب تنظيمها في جدول أو توزيع تكراري مزدوج، وحساب معامل الإرتباط من هذه البيانات المبوبة. كما أن الباحث قد يلجأ إلى تحليل بيانات أو إحصاءات معروضة في جداول تكرارية مزدوجة، وعليه أن يقوم بقياس الإرتباط من هذه الجداول .

والصيغة المستخدمة لقياس الإرتباط في هذه الحالة هي نفس الصيغة السابق عرضها مع أخذ التكرارات في الحسبان، وتصبح كما يلي :

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص ك} - \text{مجـ س ك} \quad \text{مجـ ص ك}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{٢}\text{ ك} - (\text{مجـ س ك})^{٢}]\,[\text{ن مجـ ص}^{٢}\text{ ك} - (\text{مجـ ص ك})^{٢}]}} \qquad (٤-٣)$$

ويجب ملاحظة معنى ك في هذه الصيغة فهي تعبر عن التكرار للمتغير السابق لها مباشرة، فمثلًا بالمقدار مجـ س ص ك تفسر ك على أنها التكرار للمتغير س ص أي التكرار المزدوج الموضح بالخلايا وسط الجدول وكذلك فإن ك بالمقدار مجـ س ك (مجـ ص ك) تعني التكرار للمتغير س (ص) أي التكرار الهامشي .

تطبيـق ٤ :

المطلوب قياس الإرتباط بين المتغير س (عدد الزوجات) والمتغير ص (عدد الأولاد في الأسرة). باستخدام التوزيع المزدوج التالي :

ص \ س	١	٢	٣	٤	ك
٠-٤	٢٥	٢			٢٧
٤-٨	١٠	١٥	٥		٣٠
٨-١٢	٥	٨	٤	٦	٢٣
١٢-١٦		٥	١١	٤	٢٠
	٤٠	٣٠	٢٠	١٠	١٠٠

ص \ س	١	٢	٣	٤	ك	ص	ص ك	ص٢ ك
٠-٤	٥٠	٨			٢٧	٢	٥٤	١٠٨
٤-٨	٦٠	١٨٠	٩٠		٣٠	٦	١٨٠	١٠٨٠
٨-١٢	٥٠	١٦٠	١٢٠	٢٤٠	٢٣	١٠	٢٣٠	٢٣٠٠
١٢-١٦		١٤٠	٤٦٢	٢٢٤	٢٠	١٤	٢٨٠	٣٩٢٠
ك	٤٠	٣٠	٢٠	١٠	١٠٠		٧٤٤	٧٤٠٨
س	١	٢	٣	٤				
س ك	٤٠	٦٠	٦٠	٤٠	٢٠٠			
س٢ ك	٤٠	١٢٠	١٨٠	١٦٠	٥٠٠			

مجـ س ص ك = ١٧٨٤

لاحظ أن قيم س ص ك موضوعة في وسط الجدول، وتم حسابها كما يلي :

س ص ك

(١) (٢) (٢٥) = ٥٠

(٢) (٢) (٢) = ٨

(١) (٦) (١٠) = ٦٠

وهكـــذا .

$$ر = \frac{١٠٠\ (١٧٨٤) - (٢٠٠)\ (٧٤٤)}{\sqrt{[١٠٠\ (٥٠٠) - (٢٠٠)^{٢}]\ [١٠٠\ (٧٤٠٨) - (٧٤٤)^{٢}]}} = ٠,٦٨٤$$

أي أن الإرتباط طردي متوسط .

الطرق المختصرة :

يمكن تسهيلًا للعمل الحسابي تحويل المتغير إلى آخر أكثر سهولة في التعامل معه، تماماً كما سبق عند إيجاد قيمة المتوسط الحسابي والتباين. ومن التحويلات المناسبة طرح رقم ثابت من القيم. وإذا كانت الفئات منتظمة فإنه يمكن تحويل قيم مراكز الفئات س، ص إلى متغيرات أخرى ولتكن س، ص لها القيم ...، −٣، −٢، −١، صفر٢ + ١، + ٢، + ٣، ... وبعد ذلك نطبق صيغة معامل الإرتباط وكما سبق ذكره في (٤−٣) ، ويجب ملاحظة أن قيمة معامل الإرتباط لا تتأثر بالتحويل المذكور أعلاه .

تطبيـــق ٥ :

التوزيع التكراري المزدوج التالي يعرض العلاقة بين إنتاج العامل س وأجره ص . والمطلوب قياس الإرتباط بينهما .

ص \ س	٨٠-٨٥	٨٥-٩٠	٩٠-٩٥	٩٥-١٠٠	١٠٠-١٠٥	تكرار ص
٣٠-٤٠	١	١				٢
٤٠-٥٠	٢	٢				٤
٥٠-٦٠	١	٢	٣	١		٧
٦٠-٧٠		٣	٥	٢	١	١١
٧٠-٨٠			٢	٢	٢	٦
تكرار س	٤	٨	١٠	٥	٣	٣٠

والجدول التالي ينظم كيفية الحصول على القيم المطلوبة ومعظمها سبق التدرب على ايجاده (عند حساب التباين) كالقيم مجـ س ك، مجـ س^{٢} ك، وكذا مجـ ص ك، مجـ ص^{٢} ك أما المقدار الخامس والممثل في القيم س ص ك، فقد خصص لحسابها مربعات داخل الخلايا يدون بها حواصل الضرب، فمثلاً الخلية

ص \ س	٨٠ ــ ٨٥	٨٥ ــ ٩٠	٩٠ ــ ٩٥	٩٥ ــ ١٠٠	١٠٠ ــ ١٠٥	مجموع	ص	ص ك	ص^{٢}ك
٣٠ ــ ٤٠	١ [٤]	١ [٢]				٢	٢-	٤-	٤
٤٠ ــ ٥٠	٢ [٤]	٢ [٢]				٤	١-	٤-	٤
٥٠ ــ ٦٠	١ [٠]	٢ [٠]	٣ [٠]	١ [٠]		٧	صفر	صفر	صفر
٦٠ ــ ٧٠		٣ [٣-]	٥ [٠]	٢ [٢]	١ [٢]	١١	١	١١	١١
٧٠ ــ ٨٠			٢ [٠]	٢ [٤]	٢ [٨]	٦	٢	١٢	٢٤
مجموع	٤	٨	١٠	٥	٣	٣٠		١٥	٤٣
س	٢-	١-	صفر	١	٢				
س ك	٨-	٨-	صفر	٥	٦	٥-			
س^{٢} ك	١٦	٨	صفر	٥	١٢	٤١			
س ص ك	٨	١	صفر	٦	١٠	٢٥			

بالصف الأول والعمود الأول، تكرارها = ١ وقيمة س = -٢ وقيمة ص = -٢ فيكون حاصل الضرب ك س ص = (١)(-٢)(-٢) = ٤ وتم وضع هذا الرقم

داخل مربع صغير بالخلية المذكورة. كذلك على سبيل المثال، الخلية بالصف الأخير والعمود الأخير، فإن ك س ص = (٢)(٢)(٢) = ٨. وهكذا.. وقد خصص الصف الأخير بالجدول اعلاه لتجميع هذه القيم فالرقم ٨ عبارة عن حاصل جمع الأرقام المجودة بالمربعات الصغيرة بالعمود الأول أي ٤ + ٤ + صفر = ٨. والرقم الثاني وهو ١ نتيجة لحاصل جمع الأرقام الموجودة داخل المربعات بالعموذ الثاني أي ٢ + ٢ + صفر - ٣ = ١ وهكذا.

$$ر = \frac{٣٠(٢٥) - (-٥)(١٥)}{\sqrt{[٣٠(٤١) - (-٥)^{٢}][٣٠(٤٣) - (١٥)^{٢}]}} = \frac{٨٢٥}{\sqrt{[١٢٠٥][١٠٦٥]}} = ٠,٧٢٨$$

اي أنه يوجد ارتباط قوي بين أجر العامل وانتاجه.

٤-٣ الإرتباط بين متغيران ترتيبيان :

٤-٣-١ مقدمـة :

إن معامل بيرسون للارتباط يتطلب أن يكون كلا المتغيران في صورة رقمية، أي على أساس التدريج ذو الفئات المتساوية. ولكن هناك بعض الظواهر قد تكون عروضة على أساس التوزيع الترتيبي فقط، فمثلاً درجات الطلاب قد تكون معروضة على أساس ممتاز ــ جيد جداً ــ جيد ــ متوسط ــ ضعيف ــ ضعيف جدا، وعلى أي حال هناك العديد من المتغيرات تعرض قياساتها على هذا المستوى، خاصة في العلوم الاجتماعية. مثال ذلك الطبقة الاجتماعية، القدرة على القيادة، الشعبية التي يتمتع بها الفرد، الذكاء.

وفي هذا الصدد، يوجد عدة مقاييس لبيان الارتباط بين المتغيرات نعرض منها ما يلي:

٤-٣-٢ معامل ارتباط سبيرمان (Spearman) :

يتم ترتيب كلا المتغيران ترتيباً تصاعدياً (أو تنازلياً)، ويتم احتسـابه باستخدام الصيغة التالية:

$$\text{ر}' = ١ - \frac{٦ \; \text{مجـ ف}^{٢}}{\text{ن} \; (\text{ن}^{٢} - ١)} \qquad (٤-٤)$$

حيث ر' ترمز لمعامل ارتباط الرتب لسبيرمان، ف = الفرق بين رتبة المتغيرين، ن هو عدد أزواج القيم.

□ ملاحظات:

١ ـ قيمة معامل ارتباط الرتب تنحصر بين -١، +١. وهو يساوي -١ إذا كان الارتباط تام عكسي ويساوي صفر في حالة عدم وجود ارتباط، ويساوي +١ في حالة وجود ارتباط تام طردي.

٢ ـ صيغة معامل ارتباط الرتب ما هي إلا صيغة مختصرة لصيغة معامل ارتباط بيرسون وذلك في حالة تطبيقها على الرتب.

٣ ـ يستخدم معامل سبيرمان أساساً لايجاد الارتباط في حالة المتغيرات النوعية التي يمكن ترتيبها. ومع ذلك، ولاعتبارات السهولة والسرعة يتم أحياناً استخدامه في حالة البيانات الرقمية بدلاً من معامل بيرسون خاصة وأن الفروق بينهما قليلة.

٤ ـ في حالة وجود قيم مكررة فإنه يعطي لكل منها رتبة تعادل المتوسط الحسابي لرتب القيم المكررة. وفي هذه الحالة فإن الصيغة السابق عرضها تعطي نتيجة تقريبية.

□ مثال ٦ :

البيان التالي يوضح تقديرات ستة طلاب في مادتي الاحصاء والرياضيات والمطلوب ايجاد معامل الارتباط بين التقديرات في المادتين.

الطالب	أ	ب	ج	د	هـ	و
الرياضة	ممتاز	جيد	ضعيف	جيد جداً	مقبول	ضعيف جداً
الاحصاء	جيد جداً	جيد	ضعيف جداً	ممتاز	ضعيف	مقبول

□ الحل:

س درجة الرياضة	ص درجة الاحصاء	رتب س	رتب ص	ف٢
ممتاز	جيد جداً	٦	٥	١
جيد	جيد	٤	٤	صفر
ضعيف	ضعيف جداً	٢	١	١
جيد جداً	ممتاز	٥	٦	١
مقبول	ضعيف	٣	٢	١
ضعيف جدا	مقبول	١	٣	٤
				٨

$$ر' = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{ن\,(ن^{٢} - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦(٨)}{٦(٣٦ - ١)} = ١ - ٠,٢٢٩ = ٠,٧٧١$$

أي أنه يمكن القول بوجود ارتباط قوي بين تقديرات المادتين.

□ مثال ٧ :

في دراسة لأحوال الأسرة في أحد المجتمعات تم جمع البيانات التالية وهي تمثل الحالة الاجتماعية والاقتصادية لأسر كل من الزوج والزوجة والمطلوب إيجاد معامل الارتباط بينهما.

الحالة الاجتماعية والاقتصادية لأسرة الزوج	متوسطة	جيدة	ممتازة	منخفضة	منخفضة جداً	متوسطة
الحالة الاجتماعية والاقتصادية لأسره الزوجة	جيدة	ممتازة	ممتازة	جيدة	منخفضة	متوسطة

□ الحل:

الحالة الاجتماعية والاقتصادية لأسرة الزوج (س)	الحالة الاجتماعية والاقتصادية لأسرة الزوجة (ص)	رتبة س	رتبة ص	ف^٢
متوسطة	جيدة	٣,٥	٣,٥	صفر
جيدة	ممتازة	٥	٥,٥	٠,٢٥
ممتازة	ممتازة	٦	٥,٥	٠,٢٥
منخفضة	جيدة	٢	٣,٥	٢,٢٥
منخفضة جداً	منخفضة	١	١	صفر
متوسطة	متوسطة	٣,٥	٢	٢,٢٥
				٥

$$ر' = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن (ن^٢ - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦(٥)}{٦(٣٦ - ١)} = ٠,٨٥٧$$

ويمكن القول بوجود ارتباط قوي جداً بين الحالة الاجتماعية والاقتصادية في كل من أسرة الزوج وأسرة الزوجة في هذا المجتمع.

٤-٣-٣ معامل جاما (Gamma):

غالباً ما يكون عدد أزواج القيم للمتغيرين كبيراً، وبالتالي فإن تصنيفها في فئات قليلة العدد يؤدي إلى زيادة في التكرارات. وفي هذه الحالة لا يكون من المناسب استخدام معامل سبيرمان السابق عرضه، وعلى أي حال هناك عدة مقاييس يمكن استخدامها في هذه الحالة، نعرض منها واحد من المقاييس الهامة وهو معامل جاما والذي قدمه العالمان جودمان وكروسكال عام ١٩٥٤.

ولتوضيح معنى الارتباط في هذه الحالات، نعرض الجداول الخمس التالية وكل منها عبارة عن جدول مزدوج يعرض تقديرات ثمان طلاب في مادتي الاحصاء والرياضيات.

جدول (١)

رياضيات / إحصاء	جيد	مقبول
جيد	٤	٠
مقبول	٠	٤

جدول رقم (٢)

رياضيات / إحصاء	جيد	مقبول
جيد	٣	١
مقبول	١	٣

جدول رقم (٣)

رياضيات / إحصاء	جيد	مقبول
جيد	٢	٢
مقبول	٢	٢

جدول رقم (٤)

رياضيات / إحصاء	جيد	مقبول
جيد	١	٣
مقبول	٢	٢

جدول رقم (٥)

رياضيات / إحصاء	جيد	مقبول
جيد	٠	٤
مقبول	٤	٠

والجدول (١) يعبر عن وجود ارتباط تام طردي بين تقديرات المادتين الجدول رقم (٣) يعبر عن عدم وجود ارتباط والجدول رقم (٥) يعبر عن وجود ارتباط تام عكسي.

ويعتمد معامل جاما على حالات الإتفاق والاختلاف بين أزواج القيم. فالجدول رقم (١) يفيد أن هناك ٤ طلاب تقديراتهم في المادتين (جيد، جيد)

وهناك ٤ طلاب تقديراتهم (مقبول، مقبول) وبمقارنة تقديرات طالب من المجموعة الأولى بآخر من المجموعة الثانية نستطيع أن نقول أن هناك حالة اتفاق. وبمقارنة الأزواج جميعها تكون عدد حالات الاتفاق تساوي ٤ × ٤ = ١٦ حالة. ويلاحظ أن الجدول رقم (١) لا يحوي حالات اختلاف اطلاقاً بمعنى وجود طالب حاصل على (جيد، مقبول) وآخر حاصل على (مقبول، جيد).

ويعرف معامل جاما (جا) كما يلي:

جا = (أ - خـ) / (أ + خـ)   (٤-٥)

حيث أ = عدد حالات الإتفاق، خـ = عدد حالات الاختلاف.

وبحساب معامل جاما للجداول الخمسة نحصل على النتائج التالية:

الجدول	أ	خـ	جا
(١)	٤ × ٤ = ١٦	صفر	(١٦ - صفر) / (١٦ + صفر) = +١
(٢)	٣ × ٣ = ٩	١ × ١ = ١	(٩ - ١) / (٩ + ١) = +٠,٨
(٣)	٢ × ٢ = ٤	٢ × ٢ = ٤	(٤ - ٤) / (٤ + ٤) = صفر
(٤)	١ × ٢ = ٢	٢ × ٣ = ٦	(٢ - ٦) / (٢ + ٦) = -٠,٥
(٥)	صفر	٤ × ٤ = ١٦	(صفر - ١٦) / (سفر + ١٦) = -١

ولتسهيل حساب أ، خـ من الجداول المزدوجة بصفة عامة فإن المتغيران يراعى فيهما الترتيب التصاعدي أو التنازلي من قمة الجدول من اليمين. ويتم إيجاد مجموع حاصل ضرب كل رقم بالجدول (كل تكرار بالخلية) في التكرارات بالخلايا الأخرى وحسب المسارات التالية:

عند إيجاد أ: إلى أسفل ويساراً.
عند إيجاد خـ: إلى أسفل ويميناً.

□ ملاحظات:

١ ـ معامل جاما تنحصر قيمته بين +١، -١ وهو يساوي +١ في حالة الارتباط التام الطردي، -١ في حالة الارتباط التام العكسي، ويساوي صفر في حالة عدم وجود ارتباط.

ولا توجد حدود عامة لتفسير القيم بين صفر، +١ (وكذا بين صفر، -١) ويمكن على أي حال الاسترشاد بما يلي:

من صفر إلى ٠,١	ارتباط يمكن اهماله.
٠,١ إلى ٠,٣	ارتباط ضعيف
٠,٣ إلى ٠,٥	متوسط
٠,٥ إلى ٠,٧	قوي
٠,٧ إلى ١	قوي جداً

٢ ـ في حالة الجدول ٢ × ٢ (صفان وعمودان)

أ	ب
جـ	د

فإن الصيغة تكون:

$$جا = \frac{أد - ب جـ}{أد + ب جـ} \qquad (٤-٦)$$

وهي نفس صيغة معامل ارتباط آخر يسمى معامل يول (Yule).

□ مثال ٨:

في دراسة عن العلاقة بين مستوى التعليم ومستوى المسؤولية، تم تصنيف

٧٢٠ من المستخدمين بإحدى الوزارات حسب هاتين الخاصيتين، وكما هو موضح بالجدول التالي. أوجد معامل الارتباط؟

مستوى التعليم ومستوى المسؤولية

المسؤولية \ التعليم	دكتوراه	ماجستير	بكالوريوس
عال	٥٥	٢٠٠	
متوسط	٥٥	١٠٠	٢٠٠
منخفض		٥٥	٥٥

أ = ٥٥(١٠٠ + ٢٠٠ + ٥٥ + ٥٥) + ٢٠٠(٢٠٠ + ٥٥) + ٥٥(٥٥
+ ٥٥) + ١٠٠(٥٥) = ٨٥١٠٠

خـ = ٢٠٠(٥٥) + ٢٠٠(٥٥) = ٢٢٠٠٠

$$\text{جا} = \frac{\text{أ} - \text{خـ}}{\text{أ} + \text{خـ}} = \frac{٨٥١٠٠ - ٢٢٠٠٠}{٨٥١٠٠ + ٢٢٠٠٠} = ٠,٥٨٩$$

أي يوجد ارتباط قوي وموجب، أي أنه كلما زاد مستوى التعليم زاد مستوى المسؤولية.

□ مثال ٩ :

في دراسة عن الحراك الاجتماعي في إحدى المدن قام أحد الباحثين الاجتماعيين بجمع بيانات عن ٢٠٠ شخص حسب الموضح بالجدول التالي وهي توضح الطبقة الاجتماعية التي ينتمي إليها كل من الشخص وأبيه. أوجد معامل الارتباط بينهما؟

الطبقة الاجتماعية

الابن \ الأب	ممتازة	جيدة	متوسطة	منخفضة
ممتازة	٦	٣	١	
جيدة	٣	٢٥	٣٠	٢
متوسطة	٨	٢٠	١٧	٣٥
منخفضة		٣	٢٢	٢٥

أ = ٦(٤٨ + ٦٩ + ٦٢) + ٣(٦٩ + ٦٢) + ١(٦٢) + ٣(٢٣ + ٣٩ + ٦٠) + ٢٥(٣٩ + ٦٠) + ٣٠(٦٠) + ٨(٥٠) + ٢٠(٤٧) + ١٧(٢٥) = ٧٩٣٥

خـ = ١(١١ + ٤٨) + ٣(١١) + ٢(٣٩ + ٢٣ + ٨) + ٣٠(٣١) + ٢٥(٨) + ٣٥(٢٥) + ١٧(٣) = ٢٢٨٨

(يلاحظ أن الأرقام بين القوسين هي حاصل جمع أرقام أعمدة، مثلاً ٤٨ = ٢٥ + ٢٠ + ٣)

جا = (أ − خـ) / (أ + خـ) = (٧٩٣٥ − ٢٢٨٨) / (٧٩٣٥ + ٢٢٨٨) = ٠,٥٥

أي يوجد ارتباط قوي طردي.

□ مثال ١٠ :

البيان بالجدول التالي يمثل توزيع مجموعة من الطلاب حسب درجاتهم بالاختبار وحسب الحالة الاجتماعية والاقتصادية لكل منهم. بين ما إذا كان هناك ارتباط بين مستوى التحصيل العلمي وبين الحالة الاجتماعية والاقتصادية للطالب.

التحصيل العلمي والحالة الاجتماعية والاقتصادية

الدرجة / الحالة الاجتماعية والإقتصادية	متوسط	جيد	ممتاز
صفر ــ ٦٠	٤٩	٥	١
٦٠ ــ ٧٠	١٧٨	١٢	٢
٧٠ ــ ٨٠	٩٦	٧٣	٧
٨٠ ــ ٩٠	٢٠	٥٧	١٨
٩٠ ــ ١٠٠	١١	١٣	٢٩

أ = ٤٩(٢١١) + ٥(٥٦) + ١٧٨(١٩٧) + ١٢(٥٤) + ٩٦(١١٧) + ٧٣(٤٧) + ٢٠(٤٢) + ٥٧(٢٩) = ٦٣٤٨٩

خـ = ١(٤٦٠) + ٥(٣٠٥) + ٢(٢٧٠) + ١٢(١٢٧) + ٧(١٠١) +
٧٣(٣١) + ١٨(٢٤) + ٥٧(١١) = ٨٠٧٨

$$\text{جا} = \frac{\text{أ} - \text{خـ}}{\text{أ} + \text{خـ}} = \frac{٦٣٤٨٩ - ٨٠٧٨}{٦٣٤٨٩ + ٨٠٧٨} = ٠,٧٧٤$$

أي يوجد ارتباط قوي جداً وطردي .

٤-٣-٤ معامل ارتباط كندال Kendall - Correlation Coefficient :

هذا المعامل قدمه كندال عام ١٩٣٨ لقياس الإرتباط بين متغيرين كلاهما على المستوى الترتيبي . ويرمز لهذا العامل بالرمز T وينطق (تو) Tau . وصيغته كما يلي :

$$\text{تو} = \frac{\text{أ} - \text{خـ}}{٠,٥ \text{ ن } (\text{ن} - ١)} \qquad (٤-٧)$$

وتعرف أ ، خـ تماماً كما في معامل إرتباط جاما .

ملاحظـــات :

(١) قيمة المعامل تقع بين ± ١ والقيمة + ١ تعني إرتباط تام طردي ، - ١ تعني إرتباط تام عكسي ، صفر تعني عدم وجود إرتباط .

(٢) في حالة وجود قيود ties أي وجود تكرار لبعض القيم فإن قيمة هذا المعامل لا تصل إلى الحد الأقصى ± ١ .

(٣) هذا المعامل يرمز إليه كاملًا بالصورة تو أ Ta إذ أن كندال – قدم معاملان آخران للإرتباط وهو في سبيل معالجة الإنتقادات الموجهة لمعامل تو أ ويرمز للمعاملان الآخران بالرموز تو ب Tb ، تو س Tc .

(٤) المقدار ٠,٥ن (ن–١) وهو مقام معامل كندال يمثل عدد المقارنات الكلي بين أزواج القيم .

تطبيـق ١١ :

في التطبيق ٩ الخاص بدراسة الحراك الإجتماعي، المطلوب قياس الإرتباط باستخدام معامل كندال .

الحل:

$$\text{تو} = \frac{\text{أ} - \text{خـ}}{\text{٠,٥ ن (ن–١)}}$$

$$= \frac{\text{٧٩٣٥–٢٢٨٨}}{\text{٠,٥ (٢٠٠) (١٩٩)}} = \frac{\text{٥٦٤٧}}{\text{١٩٩٠٠}} = \text{٠,٢٨٤}$$

٤-٤ الإرتباط بين متغيران إسميان :

٤-٤-١ مقدمـــة :

هناك الكثير من المتغيرات لا يمكن قياسها أو حتى مجرد تقسيمها في رتب وكل ما هو ممكن هو تقسيم المتغير إلى مجموعات أو أقسام يكون فيها لكل قسم صفة مميزة له، والأمثلة على ذلك كثيرة، فالجنس يتم تقسيمه إلى ذكور - إناث والحالة الاجتماعية يمكن تقسيمها إلى متزوج - أعزب - مطلق - أرمل ولون البشرة يمكن تقسيمه إلى أبيض - أسمر - أسود.. إلخ. والجنسية تقسم إلى مصري - سعودي - عراقي .. إلخ . ونوع الجريمة يصنف سرقة - سطو - قتل - خطف... إلخ .

٤-٤-٢ معامل كرامير :

هناك عدد كبير من المقاييس الإحصائية التي يمكن استخدامها لبيان مدى العلاقة أو الارتباط بين هذه المتغيرات الكيفية، منها ما يسمى معامل التوافق الذي قدمه العالم كرامير (Cramer) عام ١٩٤٦ ويتم حساب هذا المعامل من جدول التوافق التالي عرضه باستخدام الصيغة التالية، وهي نفس صيغة معامل كرامير ولكن بصورة مبسطة ولتسهيل العمل الحسابي (أنظر جدول التوافق أدناه) .

$$\text{ق} = \sqrt{\frac{\text{حـ} - ١}{\text{ع} - ١}} \qquad (٨-٤)$$

حيث : ق = معامل كرامير للتوافق .

ع = عدد الصفوف أو الأعمدة أيهما أقل .

$$ح = \text{مجـ} \frac{(ك_{رل})^{٢}}{(ك_{ر.})(ك_{.ل})} = \text{مجـ} \frac{(\text{تكرار الخلية})^{٢}}{(\text{تكرار الصف})(\text{تكرار العمود})} \quad (٤-٩)$$

$ك_{رل}$ = تكرار الخلية الموجودة بالصف ر والعمود ل.

$ك_{ر.}$ = تكرار الصف ر

$ك_{.ل}$ = تكرار العمود ل.

جدول التوافق

ص \ س	$س_{١}$	$س_{٢}$	...	$س_{ل}$	...	$س_{د}$	
$ص_{١}$	$ك_{١١}$	$ك_{٢١}$	...	$ك_{١ل}$	...	$ك_{١د}$	$ك_{١.}$
$ص_{٢}$	$ك_{١٢}$	$ك_{٢٢}$		$ك_{٢ل}$		$ك_{٢د}$	$ك_{٢.}$
$ص_{ر}$	$ك_{ر١}$	$ك_{ر٢}$	...	$ك_{رل}$		$ك_{رد}$	$ك_{ر.}$
$ص_{م}$	$ك_{م١}$					$ك_{مد}$	$ك_{م.}$
	$ك_{.١}$	$ك_{.٢}$	...	$ك_{.ل}$		$ك_{.د}$	ن

□ ملاحظات:

١ ـ تنحصر قيمة ن بين صفر، واحد صحيح، وهو يساوي صفر في حالة الاستقلال التام ويساوي واحد في حالة الارتباط التام. هذا ويصعب تفسير القيم البينية، أي بين الصفر والواحد تفسيراً دقيقاً، على أنه يمكن الاسترشاد بما يلي:

من صفر إلى ٠,١	ارتباط قليل يمكن اهماله
٠,١ إلى ٠,٢	ارتباط ضعيف
٠,٢ إلى ٠,٤	ارتباط متوسط
٠,٤ إلى ٠,٦	ارتباط قوي
٠,٦ إلى ١	ارتباط قوي جداً

٢ ـ اتجاه العلاقة (طردي أو عكسي) هنا أمر غير وارد.

٣ ــ في الحالة الخاصة، إذا كان الجدول يشتمل على صفان أو عمودان فإن صيغة معامل كرامير تصبح :

$$ق = \sqrt{حـ - ١}$$

وهذه مماثلة تماماً لمعامل ارتباط آخر يطلق عليه معامل فاي (Phi).

☐ مثال: ١٢ :

في دراسة للعلاقة بين البطالة والأمية في كل من الريف والحضر تم الحصول على البيانات التالية، والمطلوب بيان قوة العلاقة بينهما.

الحضر

	أمي	غير أمي	مجموع
عاطل	٥٠	١٧	٦٧
يعمل	١٢	٣١	٤٣
مجموع	٦٢	٤٨	١١٠

الريف

	أمي	غير أمي	مجموع
عاطل	٢٨	٢٠	٤٨
يعمل	٤٢	٣٥	٧٧
	٧٠	٥٥	١٢٥

☐ الحل:

$$ق = \sqrt{\frac{حـ - ١}{ع - ١}} = \sqrt{حـ - ١}$$

ويمكن تسهيل حساب قيمة حـ بتدوين البيانات داخل الجدول وكما هو موضح بالمربع الملحق بكل خلية.

الحضر

٥٠ [٠,٦٠٢]	١٧ [٠,٠٩٠]	٦٧
١٢ [٠,٠٥٤]	٣١ [٠,٤٦٥]	٤٣
٦٢	٤٨	

الريف

٢٨ [٠,٢٣٣]	٢٠ [٠,١٥٢]	٤٨
٤٢ [٠,٣٢٧]	٣٥ [٠,٢٨٩]	٧٧
٧٠	٥٥	

بالنسبة للحضر: ق = $\sqrt{1,211 - 1}$ = ٠,٤٦ أي وجد ارتباط قوي بين الأمية والبطالة.

بالنسبة للريف: ق = $\sqrt{1,001 - 1}$ = ٠,٠٣٥ أي لا يوجد ارتباط بين الأمية والبطالة.

لاحظ أن الأرقام المدونة بالمربعات في الخلايا يتم حسابها حسب القاعدة السابق ذكرها وهي

$$\frac{\text{مربع التكرار بالخلية}}{\text{مجموع الصف} \times \text{مجموع العمود}}$$

وعلى سبيل المثال

$$\frac{(٥٠)^2}{(٦٢)(٦٧)} = ٠,٦٠٢$$

$$\frac{(١٧)^2}{(٤٨)(٦٧)} = ٠,٠٩٠$$

وهكذا

□ **مثال ١٣ :**

البيان التالي يمثل توزيع عدد من طلاب الجامعات حسب تخصصاتهم العلمية وحسب طبقتهم الاجتماعية. بين مدى قوة العلاقة بينهما.

التخصص العلمي والطبقة الاجتماعية

التخصص / الطبقة	متوسط	جيد	ممتاز	مجموع
علمي	١٧	٧٢	١٢٣	٢١٢
أدبي	٣٧	٩٧	٣٥	١٦٩
أخرى	١٠٠	١٣	٢٢	١٣٥
مجموع	١٥٤	١٨٢	١٨٠	٥١٦

□ الحل:

نبدأ بإيجاد قيمة جـ ويمكن تنظيم ذلك في جدول كالآتي:

٠,٠٠٩	,١٣٤	٠,٣٩٦
٠,٠٥٣	٠,٣٠٦	٠,٠٤٠
٠,٤٨١	٠,٠٠٧	٠,٠٢٠

وكما سبق بيانه فإن المقدار ٠,٠٠٩ على سبيل المثال يتم الحصول عليه بتربيع التكرار المناظر في الجدول (١٧) ثم القسمة على مجموع الصف (٢١٢) وكذا على مجموع العمود (١٥٤) أي:

$$\frac{(١٧)^{٢}}{(٢١٢)(١٥٤)} = ,٠٠٩$$

وقيمة حـ هي حاصل جمع المقادير بالجدول الأخير

$$\text{ق} = \sqrt{\frac{\text{حـ} - ١}{\text{ع} - ١}} = \sqrt{\frac{١,٤٤٦ - ١}{٣ - ١}} = ٠,٤٧٢$$

ويعبر ذلك عن وجود ارتباط قوي بين التخصص العلمي والطبقة الاجتماعية التي ينتمي إليها الطالب.

صيغة أخرى لمعامل كرامير.:

يمكن عرض معامل ارتباط كرامير بصيغة أخرى كما يلي :

$$ق = \sqrt{\frac{كا^{٢}}{ن\,(ع - ١)}} \qquad (٤-١٠)$$

$$حيث\ كا^{٢} = مجـ \frac{(ش - ت)^{٢}}{ت} \qquad (٤-١١)$$

ش = التكرار المشاهد

ت = التكرار المتوقع

ويتم حساب التكرار المتوقع بكل خلية بافتراض الاستقلال بين المتغيرين، وباستخدام الصيغة :

$$ت = \frac{(تكرار\ الصف)\ (تكرار\ العمود)}{ن} \qquad (٤-١٢)$$

تطبيـق ١٤ :

التوزيع التكراري التالي يعرض حالة مجموعة من المرضى بعد تجربة مجموعة من المعالجات عليهم والمطلوب قياس الإرتباط بين المعالجة والنتيجة .

المعالجة / النتيجة	الدواء أ	الدواء ب	الدواء الصوري	
تحسـن	٤٧	٥٢	٣٢	١٣١
لم يتغير	٢٩	٢٢	٣٣	٨٤
أسـوأ	٦	٣	١٦	٢٥
	٨٢	٧٧	٨١	٢٤٠

تحسب التكرارات المتوقعة وهي موضحة بالجدول التالي :

٤٤,٢	٤٢	٤٤,٨
٢٨,٤	٢٧	٢٨,٧
٨,٤	٨	٨,٥

وهذه التكرارات المتوقعة حصلنا عليها كما يلي :

$$\frac{١٣١ \times ٨٢}{٢٤٠} = ٤٤,٨$$

$$\frac{١٣١ \times ٧٧}{٢٤٠} = ٤٢$$

هكـــذا .

بعد ذلك تبدأ في حساب قيمة $كا^٢$ كما يلي :

$$كا^٢ = \frac{(٤٧-٤٤,٨)^٢}{٤٤,٨} + \frac{(٥٢-٤٢)^٢}{٤٢} + ... + \frac{(١٦-٨,٤)^٢}{٨,٤} = ١٨,٢٧$$

$$ق = \sqrt{\frac{كا^٢}{ن\ (ع-١)}} = \sqrt{\frac{١٨,٢٧}{٢٤٠\ (٣-١)}} = ٠,١٩٥$$

أي أن الإرتباط ضعيف .

٤-٤-٣ معامل ارتباط لامدا Lambda Correlation Coefficient :

معامل لامدا قدمه العالم جوتمان Guttman عام ١٩٤١ لقياس الإرتباط بين المتغيرات الإسمية ويتم إحتسابه بعد إعداد جدول تكراري مزدوج باستخدام الصيغة التالية إذا كان الغرض تقدير ص بدلالة س .

$$ل_{ص س} = \frac{مجـ \hat{ك} - \hat{ك}_{ص}}{ن - \hat{ك}_{ص}} \qquad (٤-١٣)$$

حيث :

$\hat{ك}$ = تكرار الفئة المنوالية لكل فئة من فئات المتغير المقدر س

$\hat{ك}_{ص}$ = تكرار الفئة المنوالية للتوزيع الهامشي للمتغير التابع ص

ملاحظـــات :

(١) معامل لامدا يقع بين صفر ، ١

(٢) معامل لامدا ليس معامل متماثل بمعنى أن $ل_{ص س}$ لا يساوي $ل_{س ص}$ بصفة عامة .

(٣) معامل لامدا $ل_{ص س}$ يوضح الدرجة التي يمكن بها تقدير ص من المتغير المستقل أو المقدر س .

(٤) لامدا ترجع إلى حرف من الحروف اليونانية ويكتب على الصورة (λ) .

تطبيـق ١٥ :

في دراسة للمسجونين بأحد المجتمعات قام أحد الباحثين بإعداد التوزيع التكراري التالي بهدف تقدير نوع الجريمة بدلالة عمر مرتكبها. والمطلوب قياس الإرتباط بين المتغيرين .

العمر / نوع الجريمة	١٨-٣٠	٣٠-٥٠	٥٠ فأكثر	
قتـل	٣٠	١٥	٤	٤٩
خطـف	٢٠	٨٠	٦	١٠٦
سـرقة	١٠	٥	١٢٠	١٣٥
	٦٠	١٠٠	١٣٠	٢٩٠

□ الحـــل :

نضع ص = نوع الجريمة (المطلوب تقديره) ، س = العمر معامل لامدا هو المعامل المناسب .

$$ل_{ص س} = \frac{مج\ كَ - كَ\ ص}{ن - كَ\ ص}$$

$$= \frac{٢٣٠ - ١٣٥}{٢٩٠ - ١٣٥} = \frac{٩٥}{١٥٥} = ٠,٦١$$

٤-٤-٤ معامل الإرتباط الرباعي Tetrachoric Correlation :

يستخدم لقياس الإرتباط بين متغيرين كل منهما ثنائي ويتضمن صفة الاستمرار ويتبع التوزيع الطبيعي. ويتم حسابه من جدول٢×٢بالصيغة التالية

ب	أ
د	جـ

$$ر + = جتا \frac{180°}{1 + \sqrt{أ د / ب جـ}} \qquad (٤-١٤)$$

حيث : جتا هي جيب تمام الزاوية

ملاحظــات :

(١) هذه الصيغة تعد صيغة تقريبية للصيغة الأصلية (وهي معقدة) التي قدمها كارل بيرسون عام ١٩٠٠ .

(٢) حدود هذا المعامل هي - ١ ، + ١

(٣) مقدار الزاوية يتراوح بين صفر في حالة كون ب أو جـ (أو كلاهما) يساوي صفراً إلى ١٨٠ في حالة أ أو د (أو كلايهما) يساوي صفراً .

(٤) يفضل تجنب استعمال هذا المعامل عندما يكون التقسيم لأي من المتغيرين بعيداً عن النسبة ٠,٥ والمدى المناسب هو [٠,٤ - ٠,٦] .

(٥) لا يصلح هذا المعامل إذا كان تكرار أحد الخلايا صفر إذ أن الإرتباط في هذه الحالة سيكون ± ١

تطبيـق ١٦ :

المطلوب قياس الإرتباط بين المتغيرين باستخدام التوزيع أدناه :

الدرجة / التوافق	متوافق	غير متوافق	
فوق المتوسط	٤٦	٢٩	٧٥
تحت المتوسط	١٧	٣٥	٥٢
	٦٣	٦٤	١٢٧

$$ر_{+} = جتا \frac{١٨٠}{١ + \sqrt{٤٦ (٣٥) / (٢٩) (١٧)}}$$

= جتا ٦٤,٦ = ٠,٤٣

١٧ ــ البيان التالي يوضح الأرقام القياسية في إحدى الدول لكل من الأجور والأسعار (تكلفة المعيشة) في عدد من السنوات. أوجد معامل الارتباط بينهما.

السنة	١٩٧٠	١٩٧١	١٩٧٢	١٩٧٣	١٩٧٤
الرقم القياسي للأجور	١٢٠	١٢٥	١٣٢	١٣٠	١٣٨
الرقم القياسي للأسعار	١٠٥	١١٢	١٢٠	١٢٣	١٣٠

□ الحل:

معامل ارتباط بيرسون = ٠,٩٧٥

١٨ ــ فيما يلي معدلات المواليد والوفيات حسب القارات عام ١٩٨٠. أوجد معامل الارتباط بينهما.

القارات	معدلات المواليد	معدلات الوفيات
أفريقيا	٤٦	١٧,١
آسيا	٣٤,٥	١٣
اميركا اللاتينية	٣٥,٤	٨,٤
أميركا الشمالية	١٥,٣	٩
أوروبا	١٤,٥	١٠
الاقيانوسية	٢١,٦	٩

□ الحل:

معامل ارتباط بيرسون = ٠,٧٢٥

١٩ ــ البيان التالي يمثل معدلات الجريمة لحالات السطو والخطف في عشر من الولايات التابعة لاحدى الدول ــ عام ١٩٧٢. والمطلوب ايجاد معامل الارتباط باستخدام ضيغتي بيرسون وسبيرمان:

معدل جرائم السطو	١٧٤٧	٩٢٠	٢٢٣٧	١٠٢١	١٨٥٦	١١١٣	٢٠٤٥	١١٢٤	٧٠٦	٧١٨
معدل جرائم الخطف	٣٧	٢٩	٥٦	٢٠	٣٣	١٥	٤٥	٤٢	٥	١٩

□ الحل:

معامل ارتباط بيرسون = ٠,٨٢٤

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان = ٠,٨٦٧

٢٠ ــ البيان التالي يوضح درجات مجموعة من الطلبة في مادة الاحصاء وترتيب انتهائهم من الاختبار أوجد معامل الارتباط.

ترتيب الانتهاء	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
الدرجة	٩٨	٩٢	٩٧	٩٠	٩٥	٧٢	٩٧	٧٠	٦٥

□ الحل:

معامل ارتباط سبيرمان = - ٠,٦٩٦

٢١ ــ في دراسة للعلاقة بين سعر الكتاب وعدد صفحاته تم جمع البيانات التالية لعينة من الكتب. بيّن ما إذا كان هناك ارتباط بين سعر الكتاب وعدد صفحاته.

سعر الكتاب	١٢٠	١٠٠	٧٠	٨٠	٧٠	١٥٠	١٠٠
عدد الصفحات	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٦٠٠

□ الحل:

معامل ارتباط بيرسون=٠,١٢٥ وهو يوضح أن الارتباط ضعيف جدا.

٢٢ ـ أجريت دراسة على عينة من ثلاثين لاعب لكرة القدم لبيان مدى العلاقة بين الطول والوزن. أوجد معامل الارتباط باستخدام البيانات الموضحة في التوزيع التالي:

الطول / الوزن	١٨٠ ـ ١٩٠	١٧٠ ـ	١٦٠ ـ	١٥٠ ـ
٨٥ ـ ٩٠	٥			
٨٠ ـ		٢	٨	
٧٥ ـ		٦	٧	
٧٠ ـ				٢

□ الحل:

بفرض أن س متغير يمثل الطول ومراكز الفئات هي ١٨٥، ١٧٥، ١٦٥، ١٥٥. ولتسهيل العمل الحسابي كما ذكرنا نقوم بتحويل المتغير س إلى آخر وليكن س تكون له القيم ٢، ١، صفر، -١ أي على أساس طرح ١٦٥ من كل رقم ثم القسمة على مركز الفئة وهو ١٠.

وبالمثل نفرض أن صه متغير يمثل الوزن وسنقوم بتحويله الى متغير آخر ص له القيم ٢، ١، صفر، -١.

والجدول التالي يوضح كافة المعلومات المطلوبة.

ص \ س	١٨٠ ـ ١٩٠	١٧٠ـ	١٦٠ـ	١٥٠ـ	مجموع	ص	ك ص	ك ص٢
٨٥ ـ ٩٠	٥				٥	٢	١٠	٢٠
٨٠ ـ ٨٥		٢	٨		١٠	١	١٠	١٠
٧٥ ـ ٨٠		٦	٧		١٣	٠	٠	٠
٧٠ ـ ٧٥				٢	٢	١-	٢-	٢
مجموع	٥	٨	١٥	٢	٣٠		١٨	٣٢
س	٢	١	٠	١-				
ك س	١٠	٨	٠	٢-	١٦			
ك س٢	٢٠	٨	٠	٢	٣٠			
ك س ص	٢٠	٢	٠	٢	٢٤			

$$\text{ر} = \frac{(٣٠)(٢٤) - (١٦)(١٨)}{\sqrt{[٣٠(٣٠) - (١٦)^{٢}][٣٠(٣٢) - (١٨)^{٢}]}} = \frac{٤٣٢}{\sqrt{[٦٤٤][٦٣٦]}} = ٠,٦٧٥$$

٢٣ ـ في دراسة لأحوال الأسرة في إحدى المدن تم جمع البيانات التالية وهي تمثل الحالة الاجتماعية والاقتصادية لأسر كل من الزوج والـزوجة. والمطلوب بيان مدى الارتباط بينهما.

الحالة الاجتماعية والاقتصادية

أسرة الزوجة \ أسرة الزوج	ممتازة	جيدة	متوسطة
ممتازة	١١٨	٣٧	١٥
جيدة	١٨	١٣٠	٣٢
متوسطة	٩	٤٣	٩٨

□ الحل:

$$\text{حا} = \frac{\text{أ} - \text{خـ}}{\text{أ} + \text{خـ}} = \frac{٥٥٨٤٢ - ٦٨٣٣}{٥٥٨٤٢ + ٦٨٣٣} = ٠,٧٨$$

أي يـوجد ارتبـاط طردي قـوي جداً بين الحـالة الاجتمـاعية والاقتصادية لأسرة كل من الزوج والزوجة.

٢٤ ـ في بحث عن الصفات الوراثية تم جمع البيانات التالية، بين ما إذا كان هناك توافق بين لون بشرة الأبناء وآبائهم.

الآباء / الأبناء	ايض	قمحي	أسمر	مجموع
أبيض	٣٥	٧	٣	٤٥
قمحي	٢٠	٣٠	١٥	٦٥
أسمر	٧	١٦	٢٧	٥٠
مجموع	٦٢	٥٣	٤٥	١٦٠

□ الحل:

$$\text{معامل التوافق} = \sqrt{\frac{\text{ح} - ١}{\text{ع} - ١}} = \sqrt{\frac{٠,٣٣٨}{٢}} = ٠,٤١١$$

٢٥ ـ أجري بحث بإحدى وحدات العلاج النفسي لبيان درجة الارتباط بين الطبقة الاجتماعية وبين تشخيص المرض. والمطلوب بيان قوة العلاقة بينهما.

التشخيص / الطبقة الاجتماعية	عصاب	كآبة	اضطراب الشخصية	فصام الشخصية	مجموع
عالية	٤٥	٢٥	٢١	١٨	١٠٩
متوسطة	١٠	٤٥	٢٤	٢٢	١٠١
منخفضة	١٧	٢١	١٨	١٨	٧٤
مجموع	٧٢	٩١	٦٣	٥٨	٢٨٤

□ الحل:

$$\text{ق} = \sqrt{\frac{\text{ح} - ١}{\text{ع} - ١}} = \sqrt{\frac{١,١٠٨ - ١}{٣ - ١}} = \sqrt{\frac{٠,١٠٨}{٢}} = ٠,٢٣٣$$

وهذا يعني وجود علاقة ولكنها متوسطة وليست قوية.

٢٦ ـ لاختبار قدرة مصممي الأزياء على تمييز الألوان، تم انشاء ١٠ أقراص كلها ملون باللون الأزرق ولكن بتدريج يبدأ من الأزرق الفاتح حتى الأزرق الغامق ورتبة كل لون محددة بمقياس خاص بذلك. والبيانات التالية توضح الرتب الموضوعية والرتب التي تم تعيينها بمعرفة احد المتقدمين للاختبار. والمطلوب قياس مدى قدرته على تمييز الألوان.

الترتيب الموضوعي	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ترتيب المتقدم	١	٤	٧	٢	٣	٥	٨	٦	١٠	٩

□ الحل:

معامل ارتباط سبيرمان = ٠,٧٨ ويمكن القول أن قدرته على تمييز الألوان كبيرة .

□ □ □

٢٧ - في دراسة لإستعمال المكتبة تم إعداد التوزيع التكراري المزدوج النسبي الموضح أدناه . المطلوب : قياس الإرتباط بين معدل تداول الكتاب وحداثة الكتاب .

سنة النشر / معدل التداول	قبل ١٩٦٠	١٩٦٠-١٩٨٠	بعد ١٩٨٠
لا يستعمل	٣٠	١٠	•
بطـيء	٨	٢٠	•
متوسـط	٢	١٥	١٠
سـريع	•	٣	٢

□ الحــل : المتغيرات مقاسة على المستوى الترتيبي. ونستخدم معامل جاما

أ = ٣٠ (٢٠+١٥+٣+١٠+٢) + ١٠(١٢) + ٨ (٣٠) + (١٢)

+ ٢ (٥) + ١٥ (٢) = ٢١٤٠

خـ = ١٠ (١٠) + ٢٠ (٢) + ١٠ (٣) = ١٧٠

جا = (أ - خـ) / (أ + خـ) = (٢١٤٠-١٧٠) / (٢١٤٠ + ١٧٠) = ١٩٧٠ / ٢٣١٠ ٠,٨٥

أي أن الإرتباط طردي وقوي جداً .

٢٨ - في دراسة للعلاقة بين معدل إعارة الكتاب وتخصص الكتاب تم إعداد التوزيع التكراري المزدوج التالي، والمطلوب قياس الإرتباط بين المتغيران .

تخصص الكتاب / معدل الإعارة	علوم اجتماعية	لغـــات	مكتبـات	
بطـــيء	١٠	٣	١٢	٢٥
متوســـط	٣٠	٥	١٧	٥٢
كبيـــر	٢٠	٨	١٠	٣٨
	٦٠	١٦	٣٩	١١٥

□ **الحـــل :**

معامل ارتباط كرامير: ق = $\sqrt{\frac{جـ - ١}{ع - ١}}$

والجدول التالي يوضح مكونات قيم جـ المناظرة للخلايا بالجدول التكراري :

٠,٠٦٦	,٠٢٢	٠,١٤٧
٠,٢٨٨	٠,٠٣	٠,١٤٢
٠,١٧٥	٠,١٠٥	٠,٠٦٧

جـ = ٠,٠٦٦ + ,٠٢٢ + ٠٠٠٠ + ٠,٠٦٧ = ١,٠٤٢

ق = $\sqrt{\frac{١,٠٤٢ - ١}{٣ - ١}}$ = ٠,١٤٥

الإرتباط ضعيف

٢٩ – في دراسة للعلاقة بين عدد نسخ الكتاب ومعدل إعارته ، تم إعداد البيان التالي. والمطلوب قياس الإرتباط بين المتغيرين .

عدد النسخ	٤	٨	٦	١	٥
معدل الإعارة	كبير	متوسط	متوسط	بطيء	كبير جداً

س	ص	رتبة س	رتبة ص	$ف^2$
٤	كبير	٢	٤	٤
٨	متوسط	٥	٢,٥	٦,٢٥
٦	متوسط	٤	٢,٥	٢,٢٥
١	بطيء	١	١	٠
٥	كبير جداً	٣	٥	٤
				١٦,٥

معامل ارتباط سبيرمان $رَ = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن (ن^٢ - ١)}$

$$= ١ - \frac{٦ (١٦,٥)}{٥ (٢٥ - ١)} = ٠,١٧٥$$

الإرتباط طردي ضعيف .

٣٠ – في دراسة للحراك الوظيفي في أحد المجتمعات، قام أحد الباحثين الإجتماعيين بمتابعة التغير في الوظيفة، ولهذا الغرض تم إختيار ٢٠٠ من العاملين القدامى، وإعداد التوزيع التكراري الموضح أدناه، وهو يعرض المستوى الوظيفي لهم في فترتين متباعدتين. والمطلوب قياس الإرتباط بين المستويين .

المستوى الوظيفي

في الفترة الثانية / في الفترة الأولى	مرتفع	منخفض	متوسط
مرتفع	٢٠	٠	٢
متوسط	٤٠	٨	١٠
منخفض	٠	٣٠	٩٠

□ **الحل :**

معامل الإرتباط المناسب هو معامل جاما . يعاد ترتيب المتغيرات حسب القواعد ، وذلك بتبديل العمود الأخير مع العمود الأوسط . وبعدها نحصل على :

أ = ٥٧٧٦ خـ = ٨٠٠ جا = ٠,٧٥٧

الإرتباط قوي جداً وطردي .

٣١ – في دراسة لصدق إختبار الإحصاء قام أحد الباحثين بإعداد التوزيع التكراري التالي وهو يعرض العلاقة بين درجة الإحصاء والمعدل التراكمي للطالب والمطلوب قياس الإرتباط .

درجة الإحصاء / المعدل التراكمي	مقبول	جيد	جيد جداً	ممتـــاز
مقبـــول	١٥	٢	٧	١
جيـــد	١١	١٣	١٦	٥
جيد جداً	٤	٢٥	٢٧	١٠

□ الحــــل :

معامل جاما : جا = $\frac{\text{أ - خـ}}{\text{أ + خـ}}$

أ = ١٥ (١٣+١٦+٥+٢٥+٢٧+١٠) + ٢ (١٦+٥+٢٧+١٠)
+ ٧ (٥ + ١٠) + ١١ (٢٥+٢٧+١٠) + ١٣ (٢٧+١٠)
+ ١٦ (١٠) = ٢٩٨٤

خـ = ١ (١٦+١٣+١١+٢٧+٢٥+٤) + ٧ (١١+١٣+٤+٢٥)
+ ٢ (١١+٤) + ٥ (٢٧+٢٥+٤) + ١٦ (٢٥+٤)
+١٣ (٤) = ١٢٩٣

جا = $\frac{\text{٢٩٨٤ - ١٢٩٣}}{\text{٢٩٨٤ + ١٢٩٣}}$ = $\frac{\text{١٦٩١}}{\text{٤٢٧٧}}$ = ٠,٣٩٥

يوجد إرتباط طردي متوسط .

٣٢ – في دراسة لثبات الإختبار قام أحد الباحثين التربويين بإعداد البيان التالي والذي يعرض درجات الأسئلة الفردية ودرجات الأسئلة الزوجية لكل طالب والمطلوب إيجاد معامل الإرتباط .

درجات الأسئلة الفردية	٧٠	٩٠	٥٤	٣٧	٦٥
درجات الأسئلة الفردية	٨٥	٨٨	٦٠	٥٠	٥٥

□ **الحـــل :**

معامل إرتباط[1] بيرسون ر = ٠,٨٤٩ وهو إرتباط طردي قوي .

---

(١) للحصول على معامل ثبات الإختبار كله يتم تعديل المعامل أعلاه باستخدام صوغة سبيرمان – براون كما يلي :

$$\text{معامل الثبات} = \frac{\text{٢ ر}}{\text{١ + ر}} = \frac{\text{٢(٠,٨٤٩)}}{\text{١ + ٠,٨٤٩}} = \text{٠,٩١٧}$$

٣٣ – في دراسة لموضوعية الإختبار قام أحد الباحثين التربويين برصد الدرجات التالية وهي تمثل تصحيح أول وتصحيح ثان من قبل مصححين مختلفين للأوراق نفسها، والمطلوب قياس الإرتباط بينهما :

تصحيح أول	١٠	٦	٦	٣	٢
تصحيح ثان	٩	٨	٤	٢	١

□ الحـــل :

معامل إرتباط بيرسون = ٠,٩٢١ وهو إرتباط طردي قوي جداً .

٣٤ - في دراسة للعلاقة بين معدل تداول الكتاب وتخصصه تم إعداد التوزيع التكراري التالي والمطلوب :

قياس الإرتباط بين تخصص الكتاب ومعدل تداوله

التصنيف / معدل التداول	سريع	متوسط	بطيء
الاجتماع	٣	٧	٢٠
علم النفس	٢	٣	١٥
الجغرافيا والتاريخ	٤	٦	٢٠
أخرى	٣	٥	١٢

□ **الحل :**

التصنيف / معدل التداول	سريع	متوسط	بطيء	
اجتماع	,٠٢٥ ٣	,٠٧٧ ٧	٠,١٩٩ ٢٠	٣٠
علم النفس	٠,٠١٧ ٢	٠,٠٢١ ٣	٠,١٦٨ ١٥	٢٠
الجغرافيا والتاريخ	٠,٠٤٤ ٤	٠,٠٥٧ ٦	٠,١٩٩ ٢٠	٣٠
أخرى	٠,٠٣٨ ٣	٠,٠٥٩ ٥	٠,١٠٧ ١٢	٢٠
	١٢	٢١	٦٧	١٠٠

$$\text{ق} = \sqrt{\frac{\text{جـ} - ١}{\text{ع} - ١}} = \sqrt{\frac{١,٠١١ - ١}{٣ - ١}} = ٠,٠٧٤ \text{ إرتباط ضعيف}$$

٣٥ – التوزيع التكراري المزدوج التالي يعرض العلاقة بين تشخيص الأطفال غير السويين وتشخيص آبائهم من نفس الجنس والمطلوب إختيار المعامل المناسب لإيضاح درجة إمكان تقدير تشخيص الإبن بمعرفة تشخيص الأب ثم أوجد قيمة المعامل .

تشخيص الأب / تشخيص الإبن	بارانويا	هيستريا	فصام	عادي	
بارانويا	١٢	٤	١٧	٥٠	٨٣
هيستريا	٤	١٨	٩	٣	٣٤
فصام	٢	٢	٣٠	٠	٣٤
عصاب	٠	١	٤	٠	٥
عادي	٣	٣٠	٥	٢٠٠	٢٣٨
	٢١	٥٥	٦٥	٢٥٣	٣٩٤

☐ **الحـــل :**

المعامل المناسب هو معامل لامدا ، نرمز لتشخيص الإبن بالرمز ص (المطلوب تقديره) ، تشخيص الإبن بالرمز س .

$$\text{لص س} = \frac{٢٦٠ - ٢٣٨}{٣٩٤ - ٢٣٨} = \frac{٢٢}{١٥٦} = ٠,١٤$$

٣٦ – في دراسة للعلاقة بين معدل تداول الكتاب وحداثته تم سحب عينة من المراجع وسجلت بيانات سنة النشر، ومعدل التداول في السنة والمطلوب :
قياس الإرتباط بين معدل تداول الكتاب وحداثته

سنة النشر	١٤٠٥	١٤٠٠	١٣٨٩	١٤٠٠	١٤٠٢	١٤٠٤
معدل التداول	سريع	بطيء	متوسط	بطيء	سريع	بطيء جداً

□ الحـــل :

سنة النشر	معدل التداول	س	ص	$ف^2$
١٤٠٥	سريع	٦	٥,٥	٠,٢٥
١٤٠٠	بطيء	٢,٥	٢,٥	٠
١٣٨٩	متوسط	١	٤	٩
١٤٠٠	بطيء	٢,٥	٢,٥	٠
١٤٠٢	سريع	٤	٥,٥	٢,٢٥
١٤٠٤	بطيء جداً	٥	١	١٦
				٢٧,٥

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^2}{ن (ن^2 - ١)}$$

$$= ١ - \frac{٦ (٢٧,٥)}{٦ (٣٦ - ١)} = ١ - ٠,٧٨٦ = ٠,٢١٤$$

إرتباط ضعيف

٣٧ – في دراسة للعلاقة بين تداول الكتاب وعدد النسخ تم سحب عينة من المراجع وسجلت بياناتها كما هو موضح أدناه . والمطلوب :

قياس الإرتباط بين عدد النسخ ومعدل تداول الكتاب

عدد النسخ	١	٢	١	٣	٤
معدل التـداول	٧	٣	١	٥	٨

□ **الحــــل :**

عدد النسخ س	معدل التداول ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$	س ص
١	٧	١	٤٩	٧
٢	٣	٤	٩	٦
١	١	١	١	١
٣	٥	٩	٢٥	١٥
٤	٨	١٦	٦٤	٣٢
١١	٢٤	٣١	١٤٨	٦١

$$ر = \frac{٥ (٦١) - (١١) (٢٤)}{\sqrt{[٥ (٣١) - (١١)^{٢}] [٥ (١٤٨) - (٢٤)^{٢}]}} = ٠,٥٤٩$$

إرتباط متوسط طردي .

٣٨ – في دراسة للرضا عن العمل وتأثيره على الإنتاجية قام أحد الباحثين الاجتماعيين بسحب عينة عشوائية من العاملين بأحد المصانع ، وتضمنت الدراسة أعداد التوزيع التكراري المزدوج التالي والمطلوب : قياس الإرتباط بين الرضا عن العمل والإنتاجية .

الإنتاجية / الرضا عن العمل	مرتفعة	متوسطة	منخفضة
راض – تماماً	٤٠	٣	٠
راض – نوعا ما	١٠	١٠	٥
غير راض	٤	٨	٢٠

□ الحـــل :

الارتباط بين الرضا عن العمل والانتاجية

أ = ٤٠ (١٠+٨+٥+٢٠) + ٣ (٥+٢٠)

+ ١٠ (٨+٢٠) + ١٠ (٢٠) = ٤٢٧٥

خـ = ٣ (١٠+٤) + ٥ (٨+٤) + ١٠ (٤) = ١٤٢

$$\text{جا} = \frac{\text{أ} - \text{خـ}}{\text{أ} + \text{خـ}} = \frac{٤٢٧٥ - ١٤٢}{٤٢٧٥ + ١٤٢} = \frac{٤١٣٣}{٤٤١٧} = ٠,٩٣٦$$

إرتباط طردي قوي جداً .

٣٩ – في اختبار لشغل الوظائف قام اثنان من المحكمين بترتيب خمسة من المتقدمين .

والمطلوب :

قياس الإرتباط بين تقديرات الحكام باعتباره مؤشراً لثبات التقديرات .

المتقدم / الحكام	أ	ب	جـ	د	هـ
الحكم س	الخامس	الثاني	الأول	الثالث	الرابع
الحكم ص	الثالث	الأول	الثاني	الخامس	الرابع

□ الحـل :

رتبة س	رتبة ص	$ف^2$
٥	٣	٤
٢	١	١
١	٢	١
٣	٥	٤
٤	٤	٠
		١٠

$$ر' = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^2}{ن (ن^2 - ١)}$$

$$ر' = ١ - \frac{٦ (١٠)}{٥ (٢٥ - ١)} = ٥,$$

٤٠ – أجريت دراسة سوسيومترية ضمن إجراءات اختيار مدير لاحدى المؤسسات، قدم فيها السؤال التالي لمجموعة العاملين :

أي الزملاء تفضل التعاون معه في العمل ؟

وقد تم تصنيف الآراء حسب جنسية الموظف المخير وكذا الموظف المختار، وكما هو موضح بالتوزيع التكراري المزدوج التالي .

والمطلوب :

قياس الإرتباط بين جنسية المخير وجنسية المختار

الموظف المختار / الموظف المخير	مصري	سعودي	سوداني
مصـري	١٠	٢٠	٣
سعـودي	٨	٣٠	١
سـوداني	١	٢	١٠

☐ الحـل :

الموظف المختار / الموظف المخير	مصري	سعودي	سوداني	
مصري	٠,١٥٩ ١٠	٠,٢٣٣ ٢٠	,٠١٩ ٣	٣٣
سعـودي	٠,٠٨٦ ٨	٠,٤٤٤ ٣٠	,٠٠٢ ١	٣٩
سـوداني	,٠٠٤ ١	٠,٠٢٦ ٢	٠,٥٤٩ ١٠	١٣
	١٩	٥٢	١٤	٨٥

جـ = ١,٥٠٢

$$ق = \sqrt{\frac{حـ - ١}{ع - ١}}$$

$$= \sqrt{\frac{١,٥٠٢ - ١}{٣ - ١}}$$

= ٠,٥

إرتباط قوي .

تطبيق ٤١ :

في أحد البحوث الاجتماعية تضمنت الإستبانة الإجابة على السؤالين التاليين :

سؤال (١) : هل تفضل مشاركة الآخرين في العمل ؟

سؤال (٢) : هل تجيد اللغة الإنجليزية ؟

وكانت الإجابة كما يلي بعد تفريغها في جدول مزدوج :

سؤال (٢) / سؤال (١)	نعم	لا
نعـم	٣٠	٨٠
لا	٩٠	٢٠

والمطلوب قياس الإرتباط بين الرغبة في المشاركة وإجادة اللغة الإنجليزية .

□ الحـــل :

$$\text{ر}_{+} = \text{جتا} \frac{\text{١٨٠}}{\text{١} + \sqrt{\text{أ د / ب حـ}}}$$

$$= \text{جتا} \frac{\text{١٨٠}}{\text{١} + \sqrt{\text{٧٢٠٠ / ٦٠٠}}} = \text{جتا ١٣٩,٧}$$

$$= -\ \text{٠,٧٦}$$

٤٢ – في دراسة بإحدى المكتبات، تم إعداد التوزيع التكراري التالي، وهو يعرض العلاقة بين معدل تداول الكتاب وتخصصه، والمطلوب قياس الإرتباط بينهما .

معدل التداول / تخصص الكتاب	سريع	متوسط	بطيء	
علوم إجتماعية	١٠	٨	٠	١٨
لغة إنجليزية	٠	٥	٣٠	٣٥
العلوم البحتة	٠	٤	٩	١٣
	١٠	١٧	٣٩	٦٦

□ الحــل :

$$ق = \sqrt{\frac{حـ - ١}{ع - ١}} \quad ، ع = ٣ .$$

حـ = ١,٦٩٧ وهي مجموع القيم بالجدول التالي

٠,٥٥٥	٠,٢٠٩	٠
٠	٠,٠٤٢	٠,٦٥٩
٠	٠,٧٢	٠,١٦٠

$$ق = \sqrt{\frac{١,٦٩٧ - ١}{٣ - ١}} = \sqrt{٠,٣٤٨٥} \quad ٠,٥٩٠ .$$

ويمكن القول أن هناك إرتباط قوي بين تخصص الكتاب ومعدل تداوله .

٤ – ٥
الإرتباط بين متغير كمي ومتغير إسمي

معامل إرتباط السلسلتان
معامل إرتباط السلسلتان الثنائي
نسبة الإرتباط

٤-٥-١ معامل إرتباط السلسلتان Biserial Correlation :

قدمه كارل بيرسون عام ١٩٠٩ ويستخدم لقياس الإرتباط بين متغيرين أحدهما كمي وليكن (ص) والآخر إسمي (س) ولكنه مستمر أصلًا ويتبع التوزيع الطبيعي. فهناك حالات يكون فيها المتغير مستمر أصلًا ولكن يصعب قياسه، أو قياسه بدقة مما يضطرنا إلى التعبير عنه بقيمتان فقط فيبدو وكأنه ثنائي dichotomy ومن الأمثلة على ذلك مستوى القلق (كبير - قليل) مستوى النجاح (راسب - ناجح)، (يحب - يكره)، العمر (شاب، مسن)، القوة (قوي، ضعيف)،... الخ .

فإذا تم تخصيص قيمتين (صغرى، كبرى)★ ولتكن (١،٠) لقيم المتغير الثنائي، وقمنا بتجزيء قيم ص تبعاً لذلك بالتناظر إلى مجموعتين : ص. ، ص١ فإن معامل إرتباط السلسلتان ($\bar{\text{ر}}$) يمكن حسابه بأي من الصيغ التالية :

$$\bar{\text{ر}} = \frac{\bar{\text{ص}}_1 - \bar{\text{ص}}_0}{\sigma_{\text{ص}}} \cdot \frac{\text{ق}_1\,\text{ق}_0}{\text{أ}} \qquad (٤-١٥)$$

$$= \frac{\bar{\text{ص}}_1 - \bar{\text{ص}}}{\sigma_{\text{ص}}} \cdot \frac{\text{ق}_1}{\text{أ}} \qquad (٤-١٦)$$

$$= \frac{\bar{\text{ص}} - \bar{\text{ص}}_0}{\sigma_{\text{ص}}} \cdot \frac{\text{ق}_0}{\text{أ}} \qquad (٤-١٧)$$

حيث : $\bar{\text{ص}}$ المتوسط الحسابي للمتغير ص

$\bar{\text{ص}}_1$ المتوسط الحسابي للمتغير ص١. المناظر للقيمة (١) للمتغير الثنائي

$\bar{\text{ص}}_0$ المتوسط الحسابي للمتغير ص.

ق_1 نسبة مفردات المتغير ص١

ق_0 نسبة مفردات المتغير ص.

أ احداثي (ارتفاع) المنحنى الطبيعي المعياري عند النقطة التي ينقسم بها التوزيع الطبيعي بنسبة ق١ ، ق.

★ يمكن أيضاً تخصيص القيم (٢،١) أو (٣،٢) .... وهكذا

تطبيق ٤٣ :

أراد أحد الباحثين تحديد درجة الصدق التلازمي Concurrent Validity في أحد اختبارات الإختيار من متعدد بهدف تحديد المهارة في كتابة المقالات والبيان التالي يوضح درجة الإختبار لكل طالب ودرجته في السؤال المقالي، والتي حددت بالقيمة ١ في حالة النجاح وصفر في حالة الرسوب .

درجة الاختبار	درجة المقال
ص	س
٢٥	٠
٣٠	١
٢٠	١
٢٥	٠
٤٠	١
٣٠	٠
٢٠	١
٣٥	٠
٢٥	١
٤٥	١

□ **الحـــل :**

$\bar{ص} = ٢٩,٥$ $\sigma_{ص} = ٧,٩$ $\bar{ص}_{١} = ٣٠$ $\bar{ص}_{.} = ٢٨,٧٥$

$ق_{١} = ٠,٦$ $ق_{.} = ٠,٤$ $أ = ٠,٣٨٦$

$$رَ = \frac{\bar{ص}_{١} - \bar{ص}}{\sigma_{ص}} . \frac{ق_{١}}{م}$$

$$= \frac{٣٠ - ٢٩,٥}{٧,٩} \times \frac{٠,٦}{٠,٣٨٦} = ٠,٠٩٨$$

الحـــل باستخدام الصيغة :

$$\text{رَ} = \frac{\bar{\text{ص}} - \bar{\text{ص}}_{.}}{\sigma_{\text{ص}}} \quad \frac{\text{ق}_{.}}{\text{أ}}$$

$$= \frac{\text{٢٨,٧٥−٢٩,٥}}{\text{٧,٩}} \times \frac{\text{٠,٤}}{\text{٠,٣٨٦}} = \text{٠,٠٩٨}$$

الحـل باستخدام الصيغة

$$\text{رَ} = \frac{\bar{\text{ص}}_{\text{١}} - \bar{\text{ص}}_{.}}{\sigma_{\text{ص}}} \quad \frac{\text{ق}_{\text{١}}\,\text{ق}_{.}}{\text{أ}}$$

$$= \frac{\text{٢٨,٧٥ − ٣٠}}{\text{٧,٩}} \times \frac{\text{(٠,٤)(٠,٦)}}{\text{٠,٣٨٦}} = \text{٠,٠٩٨}$$

تطبيـق ٤٤ :

في دراسة للعلاقة بين التدريب والإنتاج تم إعداد التوزيع المقارن التالي وهو يعرض الإنتاج لمجموعتين، اعتبرت الأولى مدربة وذلك لاستكمال برامج التدريب، أما المجموعة الثانية اعتبرت غير مدربة لعدم استكمالها برامج التدريب. والمطلوب قياس الإرتباط بين التدريب والإنتاجية .

الإنتـــاج	عدد العمال		
	المجموعة المـدربة	غيـر المـدربة	إجمـــالي
٥٥-٦٠	١	١٦	١٧
٦٠-٦٥	٠	٢١	٢١
٦٥-٧٠	١	١٩	٢٠
٧٠-٧٥	٦	٢٧	٣٣
٧٥-٨٠	٦	١٩	٢٥
٨٠-٨٥	٢	١٦	١٨
٨٥-٩٠	٥	٦	١١
	٢١	١٢٤	١٤٥

□ **الحـــل :**

معامل الإرتباط المناسب هو معامل السلسلتين.تخصص القيم (١،٠) للمتغير الثنائي (غير مدرب، مدرب) والمتغير ص للإنتاج، $ص_٠$ لإنتاج العمالة الغير مدربة، $ص_١$ لإنتاج العمالة المدربة .

$\bar{ص}_1 = ٧٧$ $\bar{ص}_. = ٧٠,٣٩$ $\sigma_{ص} = ٨,٨$

$ق_1 = ٠,١٤٥$ $أ = ٠,٢٢٨$

$$\bar{ر} = \frac{\bar{ص}_1 - \bar{ص}_.}{\sigma_{ص}} \cdot \frac{ق_1 ق_.}{أ}$$

$$= \frac{٧٧-٧٠,٣٩}{٨,٨} \cdot \frac{(٠,١٤٥)(٠,٨٥٥)}{٠,٢٢٨} = ٠,٤٠٨$$

٤-٥-٢ معامل إرتباط السلسلتان الثنائي Point biserial :

يستخدم لقياس الإرتباط عندما يكون أحد المتغيران كمي والآخر إسمي ثنائي أصيل مثل الجنس (ذكر-أنثى)، التملك (يملك-لايملك)، الحالة الزواجية (متزوج-غير متزوج) .

ويمكن حسابه بأي من الصيغ التالية :

$$. = \frac{\bar{ص}_1 - \bar{ص}_.}{\sigma_{ص}} \sqrt{ق_1 ق_.} \qquad (٤-١٨)$$

$$= \frac{\bar{ص}_1 - \bar{ص}}{\sigma_{ص}} \sqrt{\frac{ق_1}{ق_.}} \qquad (٤-١٩)$$

$$= \frac{\bar{ص} - \bar{ص}_.}{\sigma_{ص}} \sqrt{\frac{ق_.}{ق_1}} \qquad (٤-٢٠)$$

وتعرف الرموز كما في معامل إرتباط السلسلتان .

ملاحظـــات :

(١) الصيغة أعلاه هي نفس صيغة معامل بيرسون بعد تبسيطها باعتبار أن أحد المتغيران ثنائي .

(٢) لايتطلب حسابه شرط التوزيع الطبيعي .

(٣) الصيغة التالية تعرض العلاقة بين $\bar{ر}$ ، $\bar{\bar{ر}}$.

$$\bar{ر} = ر_. \sqrt{\frac{ق_1 ق_.}{أ}} \qquad (٤-٢١)$$

تطبيق ٤٥ :

البيان التالي يعرض العلاقة بين درجة الإختبار والجنس [خصص(★) رقم ١ للذكر و ٢ للأنثى] .

درجة الاختبار	الجنس
ص	س
٢٦	١
٢٨	٢
٢٤	١
٢٢	١
٢٤	٢
٣٠	٢
٢٥	١
٢١	١
٢٥	٢
٢٠	١

□ **الحـــل :**

$\bar{ص} = ٢٤,٥$ $\sigma_{ص} = ٢,٩١$ $\bar{ص}_{١} = ٢٣$

$ق_{١} = \frac{٦}{١٠} = ٠,٦$ $ق_{٢} = ٠,٤$

$$ر. = \frac{\bar{ص} - \bar{ص}_{١}}{\sigma_{ص}} \sqrt{\frac{ق_{١}}{ق_{٢}}}$$

$$= \frac{٢٤,٥-٢٣}{٢,٩١} \sqrt{\frac{٠,٦}{٠,٤}} = ٠,٦٣$$

(★) يمكن تخصيص الأرقام (صفر ، ١) أو (٢ ، ٣) ... وهكذا .

تطبيـق ٤٦ :

بافتراض أن العمالة في التطبيق ٤٤ مقسمة إلى مجموعتين الأولى مدربة والثانية لم يسبق تدريبها على الإطلاق، والمطلوب قياس الإرتباط بين التدريب والإنتاجية .

□ **الحـــل :**

معامل الإرتباط المناسب في هذه الحالة هو معامل إرتباط السلسلتان الثنائي .

$$\text{رَ}_{.} = \frac{\text{٧٧} - \text{٧٠,٣٩}}{\text{٨,٨}} \sqrt{(\text{٠,١٤٥})(\text{٠,٨٥٥})} = \text{٠,٢٦٤}$$

٤-٥-٣ نسبة الإرتباط Correlation ratio :

قدمها كارل بيرسون عام ١٩٠٥ لقياس الإرتباط في حالة وجود علاقة غير خطية بين متغيرين س ، ص وفيما يلي نسبة الإرتباط لإنحدار ص على س .

$$\text{ى}_{\text{ص س}} = \frac{\sigma_{\bar{\text{ص}}}}{\sigma_{\text{ص}}} \qquad (\text{٤-٢٢})$$

وهناك صيغة مماثلة لإنحدار س على ص .

$$\text{ى}_{\text{س ص}} = \frac{\sigma_{\bar{\text{س}}}}{\sigma_{\text{س}}} \qquad (\text{٤-٢٣})$$

حيث $\sigma_{\bar{\text{ص}}}$ ، $\sigma_{\bar{\text{س}}}$ هما الإنحرافان المعياريان لمتوسطات ص ، س . هذه المتوسطات يتم حسابها أولا لكل فئة من فئات المتغير الآخر .

ملاحظـــات :

(١) قيمة نسبة الإرتباط تقع بين صفر ، ١ والقيمة صفر تعني عدم وجود إرتباط والقيمة ١ تعني وجود إرتباط تام .

(٢) قيمة نسبة الإرتباط موجبة دائماً . ويمكن تحديد إتجاه الإرتباط من شكل الإنتشار .

(٣) $ى^{٢} \geqslant ر^{٢}$.

(٤) نسبة الإرتباط يمكن تطبيقها أياً كان شكل العلاقة بين المتغيرات، خطية أو غير خطية . وتكون العلاقة خطية في حالة ما إذا كانت ى = ر . ولذلك فإنه من المفيد حساب ى ومقارنته بقيمة ر باعتبار ذلك إختبار للعلاقة الخطية .

(٥) حساب النسبة $ى_{ص س}$ لا يعتمد على س وكذلك النسبة $ى_{س ص}$ لا تعتمد على ص وكما هو واضح من الصيغ الرياضية لهاتين النسبتين . ويعني ذلك أن هذه النسبة تشترط أن يكون واحد من المتغيران فقط كمي أما الآخر فيمكن أن يكون إسمي .

تطبيــق ٤٧ :

في دراسة للعلاقة بين عمر العامل وإنتاجيته (س ، ص) قام أحد الباحثين بإعداد التوزيع التكراري التالي ، والمطلوب :

- حساب معامل إرتباط بيرسون
- حساب نسبة إرتباط ص على س
- حساب نسبة إرتباط س على ص

س / ص	١٥–٢٥	٢٥–٣٥	٣٥–٤٥	٤٥–٥٥	٥٥–٦٥	ك
٤٥–٥٥	٢٠				٨	٢٨
٥٥–٦٥	٣	٧		٩		١٩
٦٥–٧٥		١٢		١٣		٢٥
٧٥–٨٥		٢	٧	٤		١٣
٨٥–٩٥			١٥			١٥
ك	٢٣	٢١	٢٢	٢٦	٨	١٠٠

☐ **الحــل** : معامل إرتباط بيرسون :

$$\text{ر} = \frac{١٠٠\ (٢٥٥١٠٠) - (٣٧٥٠)\ (٦٦٨٠)}{\sqrt{[١٠٠\ (١٥٧١٠٠) - (٣٧٥٠)^{٢}]\ [١٠٠\ (٤٦٥٦٠٠) - (٦٦٨٠)^{٢}]}}$$

$$= \frac{٤٦٠٠٠٠}{\sqrt{[١٦٤٧٥٠]\ [١٩٣٧٦٠٠]}} = ٠,٢٥٧$$ إرتباط ضعيف .

$$\text{ى}^{٢}_{\text{ص س}} = \frac{\sigma_{\bar{\text{ص}}}}{\sigma^{٢}_{\text{ص}}} = \frac{١٦٦,٤١}{١٩٣,٧٦} = ٠,٨٥٩$$

$$\text{ى}_{\text{ص س}} = \sqrt{٠,٨٥٩} = ٠,٩٢٧$$

$$\text{ى}^{٢}_{\text{س ص}} = \frac{١٧,١٩٦}{١٦٤,٧٥} = ٠,١٠٤$$

$$\text{ى}_{\text{س ص}} = \sqrt{٠,١٠٤} = ٠.٣٢٣$$

تطبيـق ٤٨ :

التوزيع التكراري التالي يعرض درجات مجموعة من طلبة الثانوية العامة في مادتين مختلفتين س ، ص والمطلوب : قياس الإرتباط بينهما باستخدام

أ - معامل بيرسون

ب - نسبة الإرتباط $ى_{\text{ص س}}$

ص \ س	١-٧	٨-١٤	١٥-٢١	٢٢-٢٨	٢٩-٣٥	٣٦-٤٢	٤٣-٤٩	٥٠-٥٦
١-١٠		١	١					
١١-٢٠	٢	١	٢	٢	١			
٢١-٣٠		٣	١٣	١٢	١٠	٣		
٣١-٤٠	١	٢	٥	٢٤	٢٠	١٩	٣	١
٤١-٥٠			٥	١٠	٢٢	٢٩	٨	٣
٥١-٦٠			٢	١	١٣	١٤	١٣	٧
٦١-٧٠				١	٥	٢	٢٠	٥
٧١-٨٠					١	١	٦	٦

الحــل : ر = ٠,٦٦ $\sigma^{2}_{\text{ص}}$ = ٢,١٥٩

$\sigma^{2}_{\bar{\text{ص}}}$ = ١,٠٠٣

$$ى^{2} = \frac{١,٠٠٣}{٢,١٥٩} = ٠,٤٦٥$$

$$ى = \sqrt{٠,٤٦٥} = ٠,٦٨١$$

ويلاحظ أن هذا الرقم قريب من معامل بيرسون (٠,٦٦) وهذا يبرر إفتراض الإنحدار الخطي .

٤ – ٦
الإرتباط بين متغير ترتيبي ومتغير إسمي

معامل إرتباط السلسلتان للرتب
معامل ثيتا



٤-٦-١ معامل إرتباط السلسلتان للرتب Rank biserial :

يستخدم لقياس الإرتباط بين متغيرين أحدهما مقاس على المستوى الترتيبي والآخر ثنائي أصيل . وقد قدم هذا المعامل كوريتون Coreton عام ١٩٥٦ .

وصيغــة هذا المعامل كما يلي :

$$ر_{ت ث} = \frac{٢}{ن} (\bar{ص}_{١} - \bar{ص}_{.}) \qquad (٤-٢٤)$$

حيث :

$\bar{ص}_{١}$ متوسط رتب المجموعة $ص_{١}$

$\bar{ص}_{.}$ متوسط رتب المجموعة $ص_{.}$

ن عدد الأزواج

وقيمة هذا المعامل تقع بين -١ ، +١

تطبيــق ٤٩ :

في دراسة للعلاقة بين الجنسية (س) وحالة الشخص الاجتماعية والاقتصادية (ص) تم تخصيص القيمتان (١،٠) للمتغير س بحيث تعني القيمة (١) أن الشخص يحمل جنسية أصلية والقيمة (٠) تعني أن جنسية الشخص مكتسبة : وبالنسبة للمتغير ص تم قياسه بمقياس ترتيبي وكما هو موضح أدناه. والمطلوب قياس الإرتباط بين س،ص .

س	١	١	١	٠	٠	١	١	٠	١	٠	٠	٠
ص	٣	٢	١	٥	٤	٦	٧	١٠	٩	٨	١٢	١١

□ **الحـل :** $\bar{ص}_{١}$ = ٤,٦٧ $\bar{ص}_{.}$ = ٨,٣٣ ن = ١٢

$$ر_{ت ث} = \frac{٢}{ن} (\bar{ص}_{١} - \bar{ص}_{.})$$

$$= \frac{٢}{١٢} (٤,٦٧ - ٨,٣٣) = -٠,٦١$$

تطبيـق ٥٠ :

مجموعة من الطلبة تم تكليفهم بإعداد بحوث وذلك لاختبار قدرتهم على الإبداع (س) وعلى أساس مبدع (س=١) وغير مبدع (س=٠) . وقد تم قياس ذكائهم (ص) وخصص لهم رتب مناسبة والمطلوب قياس الإرتباط بين الذكاء والقدرة على الإبداع باستخدام معامل ارتباط السلسلتان للرتب .

القدرة على الإبداع	١	١	١	٠	٠	٠	١	١	٠	٠
الذكـاء	٢	٦	١	٧	٣	١٠	٩	٥	٤	٨

$\bar{ص}_{١} = ٤,٦$ $\quad \bar{ص}_{٠} = ٦,٤$ $\quad ن = ١٠$

$$ر = \frac{٢}{ن} \left(\bar{ص}_{١} - \bar{ص}_{٠} \right)$$

$$= \frac{٢}{١٠} (٤,٦ - ٦,٤) = -٠,٣٦$$

٤-٦-٢ معامل ثيتا Theta Coefficient :

هذا المعامل قدمه فريمان Freeman عام ١٩٦٥ ويستخدم لقياس درجة العلاقة بين متغير إسمي وآخر ترتيبي . ومقدار هذا المعامل مبني على أساس مدى تلقي الوحدات في مستوى (فئة) معين من المتغير الإسمي - تقديراً أعلى للمتغير الترتيبي - عنه في مستوى آخر من المتغير الإسمي*.

---

* انظر Harshbarger ص ٤٨٤ .

ولغرض حساب معامل ثيتا، نبدأ بإعطاء كل مستوى من المتغير الإسمي رقم معين إختياري، ولنتصور المستويان ر ، ل حيث ر<ل . ويتم حساب معامل ثيتا باستخدام الصيغة التالية :

$$\theta = \frac{\text{مجـ} \left| أ_{رل} - ب_{رل} \right|}{\text{مجـ} \; ن_{ر} \; ن_{ل}} \qquad (٤-٢٥)$$

حيث :

أ ر ل   عدد المرات التي تكون فيها وحده في المستوى ر أعلى من بعض الوحدات في المستوى ل .

ب ر ل   عدد المرات التي تكون فيها وحده في المستوى ر أقل من بعض الوحدات في المستوى ل .

$ن_{ر}$ عدد وحدات المستوى ر (تكرار المستوى ر)

$ن_{ل}$ عدد وحدات المستوى ل .

ملاحظـــات :

(١) θ هو حرف يوناني وينطق ثيتا Theta .

(٢) معامل ثيتا يقع بين صفر وواحد ، ويكون صفراً في حالة عدم وجود إرتباط وواحد في حالة الإرتباط التام .

تطبيـــق :

المطلوب قياس الإرتباط بين الجنس والقدرة على التهجي (القيم مرتبة تصاعدياً) .

الجنس \ القدرة على التهجي	١	٢	٣	٤	٥	
١ ذكـر	١		١		١	٣
٢ أنثـى		١		١		٢

□ **الحــــل :** عدد المرات التي يكون فيها الذكر أفضل من الأنثى :

$أ_{٢١} = ٠ + ١ + ٢ = ٣$

عدد المرات التي تكون فيها الأنثى أفضل من الذكر

$ب_{٢١} = ٢ + ١ = ٣$

$$\theta = \frac{|أ_{٢١} - ب_{٢١}|}{ن_١ ن_٢}$$

$$= \frac{[٣ - ٣]}{٣ (٢)} = \frac{صفر}{٦} = صفر$$

تطبيــق ٥١ :

بفرض أن التوزيع التكراري للتطبيق السابق كان كما هو موضح أدناه . المطلوب قياس الإرتباط بين الجنس والقدرة على التهجي .

الجنس \ القدرة على التهجي	١	٢	٣	٤	٥	
١ ذكــر	١	١	١			٣
٢ أنثــى				١	١	٢

□ **الحــــل :** $أ_{٢١} = صفر$

$ب_{٢١} = ٢ + ٢ + ٢ = ٦$

$$\theta = \frac{|٠ - ٦|}{٦} = ١$$

تطبيــق ٥٢ :

عيادة للإرشاد الطبي للأطفال تستقبل الحالات التالية : الإكتئاب، السرقة، الشرود، الكذب. وبعد الفحص يتم إعطائهم رتب حسب تشخيص العلاج بدءا من ١ للضعيف، ٥ للجيد. باستخدام التوزيع التكراري التالي المطلوب قياس الإرتباط بين الأعراض والتشخيص .

الأعراض \ التشخيص	٥	٤	٣	٢	١	
١ شرود	٧	٣	١	١	٢	١٤
٢ كذب	٢	٢	٤	٦	٥	١٩
٣ سرقة	٢	٥	٨	٢	٣	٢٠
٤ اكتئاب	١	٠	٣	٢	٦	١٢

□ الحـــل :

أ$_{٢١}$ =٧(٢+٤+٦+٥) + ٣(٤+٦+٥) + (٦+٥) + (٥) = ١٨٠

ب$_{٢١}$ = ٢ (٦+٤+٢+٢) + ١ (٤+٢+٢) + ١ (٢+٢) + ٣ (٢) = ٤٦

وبالمثل يمكن حساب المقادير الأخرى. ويمكن تلخيص النتائج في الجدول التالي :

ر ل	أ ر ل	ب ر ل	| أ - ب |	ن ر ن
٢١	١٨٠	٦٤	١٣٤	٢٦٦
٣١	١٧٣	٦٢	١١١	٢٨٠
٤١	١٢٤	٢٠	١٠٤	١٦٨
٣٢	١٠٠	٢٠٧	١٠٧	٣٨٠
٤٢	١١٢	٦٠	٥٢	٢٢٨
٤٣	١٥٣	٣٩	١١٤	٢٤٠
			٦٢٢	١٥٦٢

$$\theta = \frac{٦٢٢}{١٥٦٢} = .٤٠$$

أي أن ٤٠٪ من المقارنات بين المرضى بأمراض مختلفة بينها إتساق في اختلاف درجة التشخيص .

الباب الخامس

مقَاييس التقدير

Prediction Measures

الإنحـدار

السلاسل الزمنية

٥-١ الإنحـدار Regression :

٥-١-١ العلاقة الخطيـة :

كما ذكرنا بالفصل السابق فإن دراسة العلاقة بين المتغيرات تختلف بحسب عدد المتغيرات ومستوى قياسها. ونستطرد هنا لإكمال دراسة العلاقة بين متغيرين فقط، قياسها رقمياً، وبافتراض أن العلاقة بينهما خطية. ونذكر عند دراستنا للارتباط بين المتغيرين أننا استخدمنا معامل بيرسون للارتباط، وهو على أي حال مقياس لقوة العلاقة بين متغيرين، كما أنه يحدد ما إذا كانت هذه العلاقة طردية (موجبة) أو عكسية (سالبة). وعلى أي حال فإنه في حالة وجود ارتباط قوي سواء كان موجب أو سالب فإنه يمكن تقدير أحد المتغيرين بدلالة المتغير الآخر.. ويتطلب ذلك التقدير تحديد طبيعة أو شكل العلاقة بين هذين المتغيرين، ويتأتى ذلك بتوفيق خط مستقيم ليصف طبيعة العلاقة بين المتغيرين ويعرف هذا الخط بخط الانحدار. وفي هذا الصدد فإن المتغير المراد تقديره يسمى المتغير التابع والمتغير الآخر يسمى المتغير المستقل.

فإذا رمزنا لقيم المتغير التابع بالرمز ص وللمتغير المستقل بالرمز س فإن خط الانحدار (ويطلق عليه في هذه الحالة خط انحدار ص على س) يكون على الصورة:

$$\hat{ص} = أ + ب\ س \qquad (٤-٢٦)$$

حيث أ، ب ثوابت، صً ترمز إلى القيمة المقدرة للمتغير التابع المناظرة للقيمة س للمتغير المستقل.

ويتم تحديد قيمة الثوابت أ، ب (تسمى ب معامل الانحدار) باستخدام أساليب رياضية بحيث يعطي أفضل توفيق، وتستخدم الصيغ التالية:

$$\text{ب} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}} \qquad (\text{٤-٢٧})$$

$$\text{أ} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}\ \bar{\text{س}} \qquad (\text{٤-٢٨})$$

تطبيـق ١ :

ولتطبيق ذلك على البيانات الواردة بالجدول رقم (١٨) بالباب السابق حيث تم تحديد معامل الارتباط بين إنتاجية العامل في الساعة وعدد ساعات العمل، وكانت قيمته هي −٠,٩٧٥. ويشير ذلك إلى وجود ارتباط قوي يكاد يكون تاماً بين إنتاجية العامل وعدد ساعات العمل.

وعليه فإننا نستطيع تقدير قيمة المتغير التابع بدلالة المتغير المستقل. وفي هذه الحالة يكون المتغير ص (إنتاجية العامل) هو المتغير التابع، والمتغير س (عدد ساعات العمل) هو المتغير المستقل، حيث أن زيادة ساعات العمل يتبعها تغير إنتاجية العامل.

ولتحديد خط انحدار ص على س، أي $\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب س}$؛ يتم حساب قيم أ، ب، وهذا يتطلب مجاميع القيم س، ص، $\text{س}^{٢}$، س ص وهذه القيم تم تحديدها عند حساب معامل الارتباط بالباب السابق.

$$\text{ب} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$= \frac{\text{٧(٢٤٨٥)} - \text{(٢٨)(٦٤٥)}}{\text{٧(١٤٠)} - \text{(٢٨)}^{٢}}$$

$$= \frac{\text{−٦٦٥}}{\text{١٩٦}} = \text{−٣,٣٩٣}$$

أ = صَ̄ − ب سَ̄

= ٦٤٥/٧ − (−٣,٣٩٣)(٢٨/٧)

= ٩٢,١٤٣ − (−٣,٣٩٣)(٤)

= ١٠٥,٧١٥

∴ صْ̂ = أ + ب س

= ١٠٥,٧١٥ − ٣,٣٩٣ س

وخط الانحدار هذا يوضح طبيعة العلاقة بين المتغيرين س، ص ويستخدم في تقدير المتغير التابع ص (إنتاجية العامل) بدلالة المتغير المستقل س (ساعات العمل).

فإذا كنا نريد معرفة انتاجية العامل في الساعة الثامنة، (أي في حالة تقرير تشغيل ٨ ساعات) فإن انتاجية العامل في الساعة الثامنة يتم الحصول عليها بتعويض س = ٨ في معادلة خط الانحدار كما يلي:

صْ̂ = ١٠٥,٧١٥ − ٣,٣٩٣(٨)

= ٧٨,٥٧١

على أنه يجب مراعاة الحذر عند استخدام معادلة خط الانحدار في التقدير حيث أن هذا التقدير يفترض أن إنتاجية العامل تتناقص بمعدل ثابت، وفي هذا المثال، قد يكون ذلك صحيحاً لساعة إضافية أو ساعتين، حيث أن زيادة ساعات العمل بعد حد معين يترتب عليها إجهاد العامل بما قد يؤدي إلى تناقص إنتاجيته بدرجة كبيرة.

وبصفة عامة فإنه يجب مراعاة الحذر عند استخدام خط الانحدار في تقدير قيمة ص عند أي قيمة خارج مدى القيم المشاهدة للمتغير س، حيث أن طبيعة العلاقة بين س، ص قد تتغير خارج هذا المدى. وعلى أي حال فإنه من الممكن

استخدام خط الانحدار في التقدير في حدود مدى معين لقيمة س يتوقع الباحث فيه استمرار العلاقة بين س، ص كما هي محددة بخط الانحدار.

□ مثال ٢ :

س	١	٣	٤	٦	٨	٩	١١	١٤
ص	١	٢	٤	٤	٥	٧	٨	٩

من الجدول الموضح لقيم المتغيران س، ص أوجد:

(أ) معامل الارتباط بين س، ص

(ب) خط انحدار ص على س

(ج) تقدير قيمة ص إذاكانت س = ١٥

□ الحل:

س	ص	$س^٢$	$ص^٢$	س ص
١	١	١	١	١
٣	٢	٩	٤	٦
٤	٤	١٦	١٦	١٦
٦	٤	٣٦	١٦	٢٤
٨	٥	٦٤	٢٥	٤٠
٩	٧	٨١	٤٩	٦٣
١١	٨	١٢١	٦٤	٨٨
١٤	٩	١٩٦	٨١	١٢٦
٥٦	٤٠	٥٢٤	٢٥٦	٣٦٤

(أ) معامل الارتباط بين س، ص

$$ر = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}][\text{ن مجـ ص}^{٢} - (\text{مجـ ص})^{٢}]}}$$

$$= \frac{٨(٣٦٤) - (٥٦)(٤٠)}{\sqrt{[٨(٥٢٤) - (٥٦)^{٢}][٨(٢٥٦) - (٤٠)^{٢}]}}$$

$$= \frac{٢٩١٢ - ٢٢٤٠}{\sqrt{[١٠٥٦][٤٤٨]}}$$

$$= \frac{٦٧٢}{٦٨٧,٨} = ٠,٩٧٧$$

أي أنه يوجد ارتباط قوي يكاد يكون تام بين المتغيرين س، ص وعلى ذلك نستطيع تقدير قيمة ص بدلالة س كما ذكرنا.

(ب) خط انحدار ص على س

$$ب = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$= \frac{٨(٣٦٤) - (٥٦)(٤٠)}{٨(٥٢٤) - (٥٦)^{٢}} = ٠,٦٣٦$$

$$أ = \bar{ص} - ب\,\bar{س}$$

$$= \frac{٤٠}{٨} - ٠,٦٣٦\left(\frac{٥٦}{٨}\right)$$

$$= ٥ - ٠,٦٣٦\,(٧) = ٠,٥٤٨$$

$$\therefore \hat{ص} = أ + ب\,س$$

$$= ٠,٥٤٨ + ٠,٦٣٦\,س$$

(ج) تقدير قيمة ص إذا كانت س = ١٥

نقوم بتعويض قيمة س = ١٥ في معادلة خط الانحدار

ص = أ + ب س والتي تم تحديدها في الخطوة (ب)

= ٠,٥٤٨ + ٠,٦٣٦ (١٥)

= ٠,٥٤٨ + ٩,٥٤

= ١٠,٠٨٨

□ مثال ٣ :

عرضنا بالفصـل السابق مثال لبحث العلاقة بين درجات الحرارة المئوية ودرجات الحرارة فهرنهيت، وعند حساب معامل ارتباط بيرسون وجدنا أنه يساوي واحد صحيح. المطلوب الآن ايجاد معادلة نحدار ص على س (استناداً للبيانات الموضحة بالمثال بالفصل السابق).

□ الحل:

$$\text{ب} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ. س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$= \frac{٣٦}{٢٠} = ١,٨$$

$$\text{أ} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}\ \bar{\text{س}}$$

$$= \frac{١٣٨,٨}{٤} - ١,٨ (\tfrac{٦}{٤}) = ٣٢$$

$$\therefore \text{ص} = ٣٢ + ١,٨\text{س}$$

ويجب ملاحظة أنه في هذا المثال فإن قيم ر، ب، أ متوقع الحصول عليها
ــ راجع مقدمة الباب السابق].

٥-١-٢ الإنحدار للبيانات المبوبة :

كما ذكرنا عند إيجاد الارتباط للقيم المبوبة فإننا نستخدم هنا أيضا نفس الصيغ السابق استخدامها في حالة البيانات غير المبوبة مع ترجيح القيم بالتكرارات المناظرة لها، كما سبق إيضاحه، وتصبح الصيغ كما يلي :

$$ب = \frac{ن \text{ مجـ } س \text{ ص ك} - \text{مجـ } س \text{ ك مجـ ص ك}}{ن \text{ مجـ } س^٢ \text{ ك} - (\text{مجـ } س \text{ ك})^٢} \qquad (٤-٢٩)$$

$$أ = \bar{ص} - ب \bar{س}$$

$$\bar{س} = \frac{\text{مجـ } س \text{ ك}}{ن}$$

$$\bar{ص} = \frac{\text{مجـ ص ك}}{ن}$$

تطبيـق ٤ :

في التطبيق ٤ بالباب الثالث الخاص بالعلاقة بين عدد الزوجات (س) وعدد الأولاد (ص)، المطلوب إيجاد معادلة تقدير عدد الأولاد بدلالة عدد الزوجات .

□ **الحـــل :** راجع الجدول في حل التطبيق المذكور .

□ **الحـل :** ب = ٢,٩٦٠

$$أ = \frac{٧٤٤}{١٠٠} - ٢,٩٦٠ \left(\frac{٢٠٠}{١٠٠}\right) = ١,٥٢$$

$$\hat{ص} = أ + ب س$$

$$= ١,٥٢ + ٢,٩٦٠ س$$

الطرق المختصـرة :

كما ذكرنا عند إيجاد الارتباط للقيم المبوبة في توزيع تكراري، فإننا هنا نستخدم نفس الصيغ السابق استخدامها في حالة البيانات الغير مبوبة مع ترجيح القيم بالتكرارات المناظرة لها. وكما اتبعنا عند حساب معامل الارتباط فإننا نقوم بتحويل المتغيران س، **ص** إلى أخرى س، ص وذلك بطرح أحدي مراكز الفئات ثم القسمة على طول الفئة، وليكن

$$\text{س} = \frac{\text{سـ} - \text{أ}_{\text{س}}}{\text{ل}_{\text{س}}} \quad ، \quad \text{ص} = \frac{\text{صـ} - \text{أ}_{\text{ص}}}{\text{ل}_{\text{ص}}}$$

حيث: $\text{أ}_{\text{س}}$، $\text{أ}_{\text{ص}}$ ثوابت (في حالة الفئات المنتظمة تمثل بمركز إحدى الفئات).

$\text{ل}_{\text{س}}$، $\text{ل}_{\text{ص}}$ ثوابت (في حالة الفئات المنتظمة تمثل بطول الفئة).

على أنه يجب ملاحظة أن الأمر هنا يختلف عنه في حالة حساب معامل الارتباط، فمعامل الارتباط (بيرسون) لا تتأثر قيمته بعمليات الطرح والقسمة حسبما ذكرنا وعليه يجب مراعاة ما يلي:

(أ) قيمة معامل الانحدار (ب) لا تتأثر بعمليات الطرح ولكن تتأثر بعمليات القسمة، ويتم حسابه كما يلي:

$$\text{ب} = \text{ب}' \times \frac{\text{ل}_{\text{ص}}}{\text{ل}_{\text{س}}} \qquad (٤-٣٠)$$

حيث ب′ يمثل معامل الانحدار في حالة التعامل مع القيم الجديدة س، ص.

(ب) المقدار الثابت أ في معادلة الانحدار يتأثر بعمليات الطرح كما يتأثر بعمليات القسمة، ويتم الحصول عليه كما يلي:

$$\text{ا} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}\ \bar{\text{س}}$$

$$\text{حيث}\ \bar{\text{ص}} = \text{ل}_{\text{ص}}\ \bar{\text{ص}} + \text{أ}_{\text{ص}}$$

$$\bar{\text{س}} = \text{ل}_{\text{س}}\ \bar{\text{س}} + \text{أ}_{\text{س}}$$

تطبيـق ٥ :

وبالرجوع للمثال بالباب السابق والخاص بدراسة العلاقة بين إنتاج العامل وأجره فإن معادلة انحدار ص على س يتم تحديدهماكما يلي:

$$\text{ب}' = \frac{\text{ن مجـ س ص ك - مجـ س ك مجـ ص ك}}{\text{ن مجـ س}^{\text{٢}}\text{ ك - (مجـ س ك)}^{\text{٢}}}$$

$$= \frac{\text{٣٠(٢٥) - (-٥)(١٥)}}{\text{٣٠(٤١) - (-٥)}^{\text{٢}}} = \frac{\text{٨٢٥}}{\text{١٢٠٥}} = \text{٠,٦٨٥}$$

$$\text{ب} = \text{ب}' \times \frac{\text{ل}_{\text{ص}}}{\text{ل}_{\text{س}}} = \text{٠,٦٨٥} \times \frac{\text{١٠}}{\text{٥}} = \text{١,٣٧}$$

$$\text{ا} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}\ \bar{\text{س}}$$

$$= \text{[١٠(}\frac{\text{١٥}}{\text{٣٠}}\text{)+٥٥] - ١,٣٧ [٥ (}\frac{\text{-٥}}{\text{٣٠}}\text{) + ٩٢,٥] = -٦٥,٥٨٣}$$

$$\hat{\text{ص}} = \text{-٦٥,٥٨٣ + ١,٣٧س}$$

وبفرض أننا نريد تقدير أجر عامل إنتاجه ١١٠ وحده،

$$\hat{\text{ص}}\ \text{(١١٠) = -٦٥,٥٨٣ + ١,٣٧ (١١٠) = ٨٥,١١٧}$$

٥-١-٣ العلاقة غير الخطية Nonlinear relationship :

في كثير من الحالات لا تكون العلاقة الخطية ملائمة لوصف العلاقة بين متغيرين، ويكون من الأفضل توفيق علاقة غير خطية بصيغة ملائمة لوصف هذه العلاقة ، ويمكن معرفة طبيعة هذه العلاقة من شكل الإنتشار أو من نظريات أو فروض أو معلومات مسبقة .

التحويل إلى العلاقة الخطية Transformation to Linearity :

في كثير من الحالات يمكن تحويل العلاقة غير الخطية إلى العلاقة الخطية، مما يسهل الوصول إلى شكل معادلة الإنحدار حيث يمكن استخدام الصيغ الخاصة بالعلاقة الخطية والتي سبق ذكرها .

والجدول التالي يعرض بعض النماذج غير الخطية ص وتحويلاتها على الصورة الخطية .

صَ = أَ + بَ سَ

حيث :

لو تعني لوغاريتم

ل اللوغاريتم الطبيعي (أساسه ٢,٧١٨٢)

ويلاحظ أنه تم عرض الرموز المحولة فقط - أما الرموز الأخرى فتظل كما هي واردة في النموذج غير الخطي .

أنظر القسم ٥-٢-٤ كنموذج للتطبيق .

	النموذج غير الخطي	النموذج الخطي صَ = أَ + بَ سَ				
	ص	صَ	سَ	أَ	بَ	
١	$أ\,هـ^{ب\,س}$	ل ص		لو أ		(٤-٣١)
٢	$أ\,هـ^{ب/س}$	ل ص	$\frac{١}{س}$			(٤-٣٢)
٣	$أ\,ب^{س}$	لو ص		لو أ	لو ب	(٤-٣٣)
٤	$أ\,س^{ب}$	لو ص	لو س	لو أ		(٤-٣٤)
٥	$أ\,س^{ب\,س}$	لو ص	س لو س	لو أ		(٤-٣٥)
٦	$\frac{أ}{س}$		$\frac{١}{س}$			(٤-٣٦)
٧	$\frac{١}{أ + ب\,س}$	$\frac{١}{ص}$				(٤-٣٧)
٨	$\frac{١}{(أ + ب\,س)^{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{ص}}$				(٤-٣٨)
٩	$أ + ب\,\sqrt{س}$		$\sqrt{س}$			(٤-٣٩)
١٠	$\frac{أ}{س + ب}$	$\frac{١}{ص}$		$\frac{ب}{أ}$	$\frac{١}{أ}$	(٤-٤٠)
١١	$\frac{أ\,س}{س + ب}$	$\frac{١}{ص}$	$\frac{١}{س}$	$\frac{ب}{أ}$	$\frac{١}{أ}$	(٤-٤١)
١٢	$ك\,أ^{س^{ب}}$	لو لو $\frac{ص}{ك}$	لو س	لو لو أ		(٤-٤٢)

معادلة الدرجة الثانية Second- degree equation :

معادلة الدرجة الثانية تعد أحد نماذج العلاقة غير الخطية الهامة إذ تلي العلاقة الخطية من حيث كثرة تطبيقاتها .

وتعرف علاقة الدرجة الثانية بين متغيرين س ، ص كما يلي :

$$\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب}_1\ \text{س} + \text{ب}_2\ \text{س}^2 \qquad (٤-٤٣)$$

وبوضع $\text{س} = \text{س}_1$ ، $\text{س}^2 = \text{س}_2$ نصل إلى الصيغة الخطية التالية :

$$\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب}_1\ \text{س}_1 + \text{ب}_2\ \text{س}_2 \qquad (٤-٤٤)$$

وباستخدام طريقة المربعات الصغرى يمكن الحصول على الثوابت أ ، ب_1 ، ب_2 وهي كما يلي :

$$\text{ب}_1 = \frac{\text{ط ب} - \text{جـ د}}{\text{و}} \qquad (٤-٤٥)$$

$$\text{ب}_2 = \frac{\text{د هـ} - \text{ط جـ}}{\text{و}} \qquad (٤-٤٦)$$

$$\text{أ} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}_1\ \bar{\text{س}}_1 - \text{ب}_2\ \bar{\text{س}}_2 \qquad (٤-٤٧)$$

حيث :

$$\text{ط} = \text{ن مجـ س}_1\ \text{ص} - \text{مجـ س}_1\ \text{مجـ ص} \qquad (٤-٤٨)$$

$$\text{ب} = \text{ن مجـ س}_2^2 - (\text{مجـ س}_2)^2 \qquad (٤-٤٩)$$

$$\text{جـ} = \text{ن مجـ س}_1\ \text{س}_2 - \text{مجـ س}_1\ \text{مجـ س}_2 \qquad (٤-٥٠)$$

$$\text{د} = \text{ن مجـ س}_2\ \text{ص} - \text{مجـ س}_2\ \text{مجـ ص} \qquad (٤-٥١)$$

$$\text{هـ} = \text{ن مجـ س}_1^2 - (\text{مجـ س}_1)^2 \qquad (٤-٥٢)$$

$$\text{و} = \text{هـ ب} - \text{جـ}^2 \qquad (٤-٥٣)$$

تطبيـق ٦ :

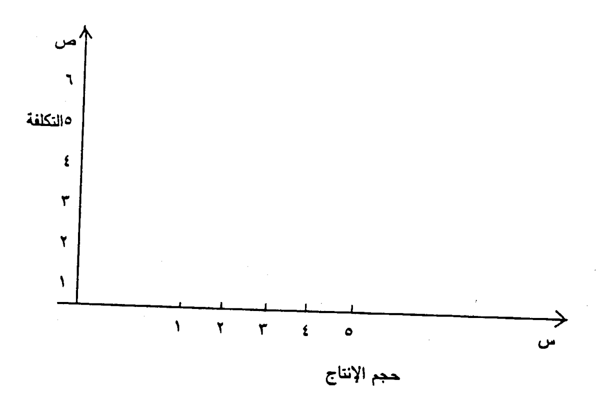
البيان التالي يوضح العلاقة بين عدد الوحدات المنتجة س وتكلفة الوحدة (ص) والمطلوب :

– تحديد معادلة إنحدار ص على س .

– تقدير تكلفة الوحدة في حالة ما إذا كان عدد الوحدات المنتجة ٢٥٠٠ وحدة .

عدد الوحدات المنتجة (ألف)	١	٢	٣	٤	٥
تكلفـة الوحـــدة	٦	٣	٢	٣	٥

الحـل : يمكن تصور شكل العلاقة بين المتغيرين بعرض شكل الإنتشار. ومن الواضح من الشكل أدناه أن افتراض العلاقة الخطية غير صحيح إذ أن تكلفة الوحدة تتناقص بزيادة الإنتاج إلى حد معين ثم تبدأ بعد ذلك في الزيادة . ويكون من الناسب في هذه الحالة افتراض علاقة من الدرجة الثانية .



نفرض أن $س_{١}$ = س ، $س_{٢}$ = $س^{٢}$

$س_{١}$	ص	$س_{٢}$	$س_{١}^{٢}$	$س_{٢}^{٢}$	$ص^{٢}$	$س_{١}$ ص	$س_{٢}$ ص	$س_{١}$ $س_{٢}$
١	٦	١	١	١	٣٦	٦	٦	١
٢	٣	٤	٤	١٦	٩	٦	١٢	٨
٣	٢	٩	٩	٨١	٤	٦	١٨	٢٧
٤	٣	١٦	١٦	٢٥٦	٩	١٢	٤٨	٦٤
٥	٥	٢٥	٢٥	٦٢٥	٢٥	٢٥	١٢٥	١٢٥
١٥	١٩	٥٥	٥٥	٩٧٩	٨٣	٥٥	٢٠٩	٢٢٥

ط = ٥(٥٥) - (١٥) (١٩) = - ١٠

ب = ٥(٩٧٩) - $(٥٥)^{٢}$ = ١٨٧٠

جـ = ٥(٢٢٥) - (١٥) (٥٥) = ٣٠٠

د = ٥(٢٠٩) - (٥٥) (١٩) = صفر

هـ = ٥(٥٥) - $(١٥)^{٢}$ = ٥٠

و = ٥٠(١٨٧٠) - $(٣٠٠)^{٢}$ = ٣٥٠٠

$ب_{١}$ = $\frac{(-١٠)\ (١٨٧٠) - (٣٠٠)\ (٠)}{٣٥٠٠}$ = - ٥,٣٤٣

$ب_{٢}$ = $\frac{٠(٥٠) - (-١٠)\ (٣٠٠)}{٣٥٠٠}$ = ٠,٨٥٧

أ = $\frac{١٩}{٥}$ -٥,٣٤٣ $(\frac{١٥}{٥})$ - ٠,٨٥٧ $(\frac{٥٥}{٥})$ = ١٠,٤

وتكون معادلة تقدير ص بدلالة س (معادلة إنحدار ص على س) كما يلي :

$\hat{ص}$ = ١٠,٤ - ٥,٣٤٣ س + ٠,٨٥٧ $س^{٢}$

تقدير تكلفة الوحدة في حالة حجم إنتاج قدره ٢٥٠٠ وحدة

$\hat{ص}$ (٢,٥) = ١٠,٤ - ٥,٣٤٣ (٢,٥) + ٠,٨٥٧ $(٢,٥)^{٢}$ = ٢,٤

تطبيـق ٧ :

البيان التالي يوضح إنتاج القمح (ص) وكمية السماد المستخدم (س) والمطلوب تحديد معادلة تقدير الإنتاج بدلالة السماد المستخدم .

كمية السماد	١	٢	٣	٤	٥
إنتاج القمح	٥٥	٧٠	٧٥	٦٥	٦٠

الحــل : من الواضح أن إنتاج القمح يتزايد بتزايد كمية السماد المستخدم إلى حد معين يبدأ معه في التناقص بعد ذلك. ولذا يكون من المناسب استخدام معادلة من الدرجة الثانية على الصورة

$$\hat{ص} = أ + ب_1 س + ب_2 س^2$$

وباستخدام الصيغ (٤-٤٥) - (٤-٥٣) نصل إلى المعادلة التالية :

$$\hat{ص} = ٣٦ + ٢٤ س - ٣,٩ س^2$$

٨ – في أحد المصانع تم تسجيل البيانات التالية وهي تعبر عن الانتاج الشهري والتكاليف الكلية المناظرة لهذا الانتاج. والمطلوب تحديد التكاليف الثابتة والتكاليف المتغيرة بالمصنع. وتقدير التكاليف إذا كان الانتاج ٦٥ وحدة.

عدد الوحدات المنتجة	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠
التكاليف الكلية (الف)	١٢	١٤	١٦	٢٠	٢٢	٢٥

□ الحل:

بفرض أن س هي عدد الوحدات المنتجة، ص هي التكاليف الكلية

□ الحل:

ص = ٨,٨٦٧ + ٠,٢٦٦ س

أي أن التكاليف الثابتة = ٨,٨٦٧ والتكلفة المتغيرة لوحدة الانتاج هي ٠,٢٦٦

عند إنتاج قدره ٦٥ وحدة تقدر التكاليف الكلية كما يلي:

ص = ٨,٨٦٧ + ٠,٢٦٦(٦٥) = ٢٦,١٤

٩ – البيان التالي يمثل عدد الطلاب بإحدى الجامعات (س) والمبالغ المخصصة للمكتبات التابعة (ص) في سنوات مختلفة والمطلوب:

١ ـ ايجاد معامل الارتباط بين عدد الطلاب والمبالغ المخصصة للمكتبات.

٢ ـ ايجاد معادلة انحدار ص على س.

٣ ـ تقدير المخصص اللازم لتمويل المكتبات في حالة توقع عدد طلاب قدره ١٨ الف.

س: عدد الطلاب (الف)	٩	١٠	١٢	١٣	١٥
ص: المبلغ المخصص (مليون)	١٣	١٤	١٧	١٩	٢٣

□ الحل:

معامل الارتباط = ٠,٩٩٤

ص = -٢,٥٦٥ + ١,٦٧٥س

ص (١٨) = -٢,٥٦٥ + ١,٦٧٥(١٨) = ٢٧,٥٨٥

١٠ ـ البيان التالي يمثل أجور بعض العمال في أحد المصانع والانتاج لكل منهم في اليوم والمطلوب:

(أ) إيجاد معامل الارتباط بين انتاج العامل وأجره.

(ب) ايجاد خط انحدار ص على س.

(ج) تقدير أجر العامل إذا وصل انتاجه ٢٢ وحدة.

انتاج العامل س	١٠	١٢	١٥	١٨	٢٠
أجره ص	٢٠	٣٠	٣٨	٤٥	٥٠

□ الحل:

(أ) ر = ٠,٩٨٩

(ب) ص = -٦,٤١٥ + ٢,٨٦٧ س

(ج) ص(٢٢) = ٥٦,٦٧

١١ – البيان التالي يمثل توزيع السكان بأحد المجتمعات. وذلك حسب العمر وكذا عدد الأميين في كل فئة والمطلوب:

(أ) ايجاد معامل الارتباط بين العمر ونسبة الأمية في المجتمع.

(ب) تقدير نسبة الأمية من المجموعة عند السن ٢٠، ٦٠، ٧٥

العمر	عدد السكان (الف)	عددالأميين (الف)
٢٠ – ٣٠	٢٥٠	٢٠
٣٠ – ٤٠	٢٠٠	٢٤
٤٠ – ٥٠	١٦٠	٢٤
٥٠ – ٦٠	١٠٠	١٩
٦٠ – ٧٠	٨٠	٢٠

(أ) نفرض أن المتغير س يمثل العمر (مركز الفئة) وأن المتغير ص يمثل نسبة الأمية ٪ بكل فئة، أي $\frac{\text{عدد الأميين}}{\text{عدد السكان}}$ × ١٠٠

وبحساب معامل الارتباط بيرسون نجد أنه يساوي ٠,٩٩٢ ويعبر ذلك عن وجود ارتباط طردي قوي جداً.

(ب) ص = -٢,٦٥ + ٠,٤١ س

وباستخدام معادلة التقدير هذه فإن نسبة الأمية عند الأعمار ٢٠، ٦٠، ٧٥ تكون ٥,٥، ٢١,٩٥، ٢٨,١

١٢ – الجدول التالي يبين درجات مجموعة من الطلاب في اختبارين، أحدهما تحريري (س) والآخر شفهي (ص) والمطلوب

(أ) إيجاد معامل الارتباط بين الدرجتين.

(ب) ايجاد معادلة انحدار ص على س.

(ج) تقدير درجة الشفهي لطالب درجته في الاختبار التحريري ٨.

الدرجة في الاختبار التحريري	١٠	٩	١٠	٥	٦
الدرجة في الاختبار الشفهي	٧	١٠	٨	١	٤

□ الحل:

(أ) معامل ارتباط بيرسون (ر) = ٠,٨٧٤

(ب) معامل الانحدار (ب) = ١,٣١٨، أ = -٤,٥٤٤

ص = -٤,٥٤٤ + ١,٣١٨ س

(ج) ص (٨) = -٤,٥٤٤ + ١,٣١٨ (٨) = ٦

١٣ ــ البيان التالي يمثل درجات مجموعة من الطلاب في اختبارين مختلفين س، ص. والمطلوب:

(أ) إيجاد معامل الارتباط.

(ب) ايجاد معادلة انحدار ص على س

(ج) تقدير قيمة ص إذا كانت س = ٦٥

ص \ س	٣٠ ــ	٤٠ ــ	٥٠ ــ	٦٠ ــ	٧٠ ــ ٨٠
٢٠ ــ	٢	٥	٣		
٣٠ ــ	١	٨	١٢	٦	
٤٠ ــ		٥	٢٢	١٤	١
٥٠ ــ		٢	١٦	٩	٢
٦٠ ــ		١	٨	٦	١
٧٠ ــ ٨٠			٢	٤	٢

□ الحل:

بفرض تحويل المتغير س (مركز الفئة) الى متغير آخر س (-٢، -١، صفر، ١، ٢) وكذا تحويل المتغير ص إلى متغير آخر ص (-٢، -١، صفر، ١، ٢، ٣)

(أ) معامل ارتباط بيرسون (ر) = ٠,٤٥

(ب) معامل الانحدار (ب') = ٠,٧، ب = ب' (ع ص / ع س) = ٠,٧

أ = صَ - ب سَ

= ١٠ (٣٨/١٣٨) + ٤٥) - ٠,٧ [١٠ (٢٤/١٣٢) + ٥٥] = ٨,١

ص = ٨,١ + ٠,٧ س

(ج) ص = ٨,١ + ٠,٧ (٦٥) = ٥٣,٦

١٤ ـ باستخدام البيانات الموضحة بتمرين رقم (٦) بالفصل السابق.
(أ) أوجد معادلة انحدار ص (الوزن) على س (الطول).
(ب) تقدير وزن لاعب طوله ١٧٥سم.

□ الحل:
(أ) راجع حل التمرين رقم (٦) بالباب السابق.

ب' = ٤٣٢/٦٤٤ = ٠,٦٧١

ب = ب' (ع ص / ع س) = ٠,٦٧١ × ٥/١٠ = ٠,٣٣٥

أ = صَ - ب سَ

= (١٨/٣٠)(٥) + ٧٧,٥ - ٠,٣٣٥ [(١٦/٣٠)(١٠) + ١٦٥] = ٢٣,٤٣٨

ص = ٢٣,٤٣٨ + ٠,٣٣٥ س

(ب) ص (١٧٥) = ٢٣,٤٣٨ + ٠,٣٣٥ (١٧٥) = ٨٢ كيلو

□ □ □

١٥ – في دراسة لاستعمال المكتبة تم إعداد البيان التالي وهو يوضح العلاقة بين معدل إعارة الكتاب (في السنة) في العام السابق وفي العام الحالي :

معدل الإعارة في العام السابق (س)	٣	٤	١٠	٥	٨
معدل الإعارة في العام الحالي (ص)	٦	٩	٢٢	١٢	١٥

المطلوب :

(أ) قياس الإرتباط بين معدل الإعارة في العام الحالي والمعدل في العام السابق .

(ب) تحديد معادلة تقدير معدل الإعارة في العام الحالي (ص) بدلالة معدل الإعارة في العام السابق (س) .

(جـ) تقدير معدل الإعارة في العام التالي لأحد الكتب معدل إعارته في العام الحالي هو ١٥ .

الحـــل :

س	ص	$س^2$	$ص^2$	س ص
٣	٦	٩	٣٦	١٨
٤	٩	١٦	٨١	٣٦
١٠	٢٢	١٠٠	٤٨٤	٢٢٠
٥	١٢	٢٥	١٤٤	٦٠
٨	١٥	٦٤	٢٢٥	١٢٠
٣٠	٦٤	٢١٤	٩٧٠	٤٥٤

(أ) ر = $\frac{٥ (٤٥٤) - (٣٠) (٦٤)}{\sqrt{[٥(٢١٤) - (٣٠)^٢] [٥(٩٧٠) - (٦٤)^٢]}}$ = ٠،٧٧ .

(ب) بَ = $\frac{٥(٤٥٤) - (٣٠) (٦٤)}{٥(٢١٤) - (٣٠)^٢}$ = ٢,٠٥٠

أ = $\frac{٦٤}{٥}$ - ٢,٠٥٠($\frac{٣٠}{٥}$) = ٠,٤٤٧

صَ = ٠,٤٤٧ + ٢,٠٦ س

(جـ) صَ (١٥) = ٠,٤٤٧ + ٢,٠٦ (١٥) = ٣١,٣

١٦ - في دراسة للعلاقة بين مخصص المكتبة وعدد الطلاب تم إعداد ا
التالي :

مخصص المكتبة	٣٠٠	٨٠٠	٧٠٠	٥٠٠
عدد الطلاب	٥٠	١٠٠	٨٠	٦٠

والمطلوب :

(أ) قياس الإرتباط بين مخصص المكتبة وعدد الطلاب .

(ب) معادلة تقدير مخصص المكتبة بدلالة عدد الطلاب .

(جـ) تقدير مخصص المكتبة إذا كان عدد الطلاب ١٢٠

س	ص	$س^٢$	$ص^٢$	س ص
٥٠	٣٠٠	٢٥٠٠	٩٠٠٠٠	١٥٠٠٠
١٠٠	٨٠٠	١٠٠٠٠	٦٤٠٠٠٠	٨٠٠٠٠
٨٠	٧٠٠	٦٤٠٠	٤٩٠٠٠٠	٥٦٠٠٠
٦٠	٥٠٠	٣٦٠٠	٢٥٠٠٠٠	٣٠٠٠٠
٢٩٠	٢٣٠٠	٢٢٥٠٠	١٤٧٠٠٠٠	١٨١٠٠٠

(أ) $ر = \frac{٤\,(١٨١٠٠٠) - (٢٩٠)\,(٢٣٠٠)}{\sqrt{[٤(٢٢٥٠٠) - (٢٩٠)^٢]\,[٤(١,٤٧٠,٠٠٠) - (٢٣٠٠)^٢]}}$

= ٠,٩٦٦ إرتباط طردي قوي جداً .

(ب) $\hat{ص} = أ + ب\,س$

$ب = \frac{٤(١٨١٠٠٠) - (٢٩٠)\,(٢٣٠٠)}{٤(٢٢٥٠٠) - (٢٩٠)^٢} = ٩,٦٦١$

$أ = \bar{ص} - ب\,\bar{س}$

$= \frac{٢٣٠٠}{٤} - ٩,٦٦١\left(\frac{٢٩٠}{٤}\right) = -\,١٢٥,٤٢٤$

$\hat{ص} = -\,١٢٥,٤٢٤ + ٩,٦٦١\,س$

(جـ) $\hat{ص}\,(١٢٠) = -\,١٢٥,٤٢٤ + ٩,٦٦١\,(١٢٠) = ١٠٣٣,٩$

- ١٧

عدد النسخ بالمكتبة	١	٢	٣	٥	٨
سعر الكتاب (ريال)	٩٠	٨٠	٦٠	٤٠	٢٠

باستخدام البيان أعلاه المطلوب :

(١) قياس الإرتباط بين عدد النسخ وسعر الكتاب

(٢) معادلة تقدير عدد النسخ بدلالة سعر الكتاب

(٣) تقدير عدد النسخ لكتاب سعره ٨ ريال

الحـــل :

نعتبر ص عدد النسخ (المتغير المطلوب تقديره) ، س سعر الكتاب

مجـ س = ٢٩٠ مجـ ص = ١٩ مجـ س ص = ٧٩٠

مجـ $س^{٢}$ = ٢٠١٠٠ مجـ $ص^{٢}$ = ١٠٣

(١) معامل إرتباط بيرسون ر = – ٠,٩٨٢

(٢) ب = – ٠,٠٩٥ ، أ = ٩,٣١٧

صٌ = ٩,٣١٧ – ٠,٠٩٥ س

(٣) صٌ (٨) = ٩

٥ – ٢

السلاسل الزمنية

Time Series

الأهميـة
العوامل المؤثرة على السلسلة الزمنية
المعادلة الخطية
المعادلة الأسية
التغيرات الموسمية



٥ – ٢
السلاسل الزمنيـة
Time Series

٥-٢-١ الأهمية :

في دراستنا لموضوع الإنحدار رأينا أن الغاية هي تحديد شكل أو طبيعة العلاقة التي تربط بين المتغير التابع وبين متغير أو أكثر (متغيرات مستقلة). ويهدف ذلك أساساً إلى إمكان تقدير قيمة المتغير التابع بدلالة المتغير أو المتغيرات المستقلة .

على أنه في سبيل قيامنا بذلك نصادف مشكلات كثيرة قد لاتمكننا من بلوغ هذا الهدف. هذه المشكلات قد تكون متعلقة بتكوين النموذج الإحصائي المستخدم أو نتائجه، فهناك بعض الظواهر لانستطيع معها تحديد المتغيرات المستقلة المرتبطة معها، أو قد تكون البيانات المتعلقة بها غير متوافرة. وحتى لو كان ذلك متاحاً فإن معادلات التقدير التي يتم تكوينها قد تحوي قدر غير مقبول من أخطاء التقدير، وبالتالي فإن استخدام هذه المعادلات سيؤدي إلى تقديرات غير دقيقة. وحتى بافتراض عدم وجود مثل هذه العقبات السابقة، فإن هناك مشكلة أخرى يمكن أن تطرأ، حيث أن استخدام معادلات الإنحدار في التقدير يتطلب توافر قيم للمتغيرات المستقلة نفسها، وهذا الأمر قد لايكون متاحاً أو أن تقديرها قد يحوي مشاكل تفوق تقدير المتغير التابع نفسه .

لكل هذا ولغيره نقدم هنا أحد النماذج الإحصائية البديلة، وهي السلاسل الزمنية، والتي يمكن استخدامها لتقدير قيم الظواهر، لا عن طريق تحديد علاقتها بعدد من المتغيرات الأخرى، بل عن طريق دراسة وتحليل سلوك الظاهرة نفسها في الماضي .

والسلسلة الزمنية هي سلسلة من القيم تخص متغير ما في أوقات أو فترات زمنية متعاقبة. هذه الفترة قد تكون سنة أو أكثر، وقد تكون ربع سنة، شهر، يوم، ساعة،.. وأمثلة ذلك أرقام تعداد السكان (التي تجري كل عشر سنوات في معظم الدول)، المواليد، الوفيات، الزواج، الهجرة، الانتاج القومي، الانتاج الصناعي أو الزراعي،.. الصادرات، الواردات، التوظف، البطالة، درجات الحرارة، أسعار الأسهم، الذهب، أسعار العملات المختلفة...

ويهدف تحليل السلاسل الزمنية إلى تقدير قيمة الظاهرة في المستقبل إستناداً إلى دراسة التطور التاريخي للظاهرة وتحديد وفصل العوامل المؤثرة عليها.

٥-٢-٢ العوامل المؤثرة على السلسلة الزمنية :

بتحليل السلسلة الزمنية لاحدى الظواهر نجد أنها قد تتأثر بكل أو بعض العوامل التالية:

(أ) الاتجاه العام.
(ب) التغيرات الموسمية.
(ج) التغيرات الدورية.
(د) التغيرات العرضية.

ويقصد بالاتجاه العام السلوك العام للمتغير أو الظاهرة محل الدراسة خلال فترة من الزمن. فمثلاً بعض الظواهر يميل أو يتجه إلى الزيادة بصفة مستمرة كعدد السكان، عدد الطلاب، أسعار سلعة، الدخل القومي. وقد نجد لبعض الظواهر ميلاً نحو النقصان، وعلى سبيل المثال نسبة البطالة، نسبة الأميين، القوة الشرائية للنقود.

ويقصد بالتغيرات الموسمية، التغيرات التي تحدث للظاهرة بصفة دورية ومتكررة. فمثلاً بتحليل رقم المبيعات في شركة للمياه الغازية، نجد أن الرقم

يتأثر بالمواسم المختلفة. والموسم بصفة عامة ليس له فترة محددة، فقد يكون ربع سنة، شهر، يوم، ساعة، يرتوقف ذلك على طبيعة الظاهرة محل البحث.

والتغيرات الدورية تشبه التغيرات الموسمية من حيث أنها دورية ولكنها تحدث خلال فترات طويلة نسبياً، كما يحدث بتأثير الدورات التجارية وما يصاحبها من فترات رواج وكساد. وأيضاً بتأثير السياسات الحكومية.

والتغيرات العرضية هي تغيرات تحدث بصورة فجائية وغير متوقعة ويصعب تقديرها وتحديد أثرها، وتحدث مثلاً بسبب الحروب والزلازل والكوارث والأوبئة والاضرابات والثورات.

تحليل السلاسل الزمنية:

ويعني ذلك تحديد طبيعة العوامل التي تؤثر على قيمة الظاهرة ومقدارها والعلاقات القائمة بينها.

وباعتبار أن:

ف = القيمة الفعلية للظاهرة.

ص = قيمة الاتجاه العام للظاهرة.

م = أثر التغير الموسمي.

د = أثر التغير الدوري.

ع = أثر التغير العرضي.

فإنه يمكن استخدام أحد النموذجين التاليين لإيضاح العلاقة بين هذه الأنواع المختلفة من التغيرات.

(أ) نموذج حاصل الضرب: ف = ص × م × د × ع

(ب) النموذج التجميعي ف = ص + م + د + ع

وفي النموذج التجميعي فإن قيم ص، م، د، ع يعبر عنها بنفس وحدات الظاهرة الأصلية، بينما في نموذج حاصل الضرب فإن الاتجاه العام فقط يعبر عنه

بوحدات الظاهرة الأصلية، أما باقي القيم فيعبر عنها كنسب مئوية. وفي دراستنا سنقتصر على عرض نموذج حاصل الضرب وسنكتفي بتحديد أثر الاتجاه العام وكذا أثر التغير الموسمي، وهذان يفسران القدر الأعظم من التغير، كما أن باقي التغيرات وهي الدورية والعرضية تتطلب تواجد عدد كبير من الفترات كما انه بصفة عامة يصعب التنبؤ بزمان وقوعها وقدر أثرها.

الاتجاه العام:

يعد الاتجاه العام هو الجزء الرئيسي من قيمة الظاهرة. وهناك عدد من الطرق يستخدم لتحديد الاتجاه العام، نقتصر على عرض ادق هذه الطرق والتي تقوم على استخدام المعادلات الرياضية. وفي هذه الطريقة يفترض أن الظاهرة تتبع معادلةمعينة، وهذه المعادلة يمكن استنتاجها من معرفة طبيعة الظاهرة، مع استخدام الرسم البياني لتطورها. ونعرض هنا لنوعين من المعادلات، هما المعادلة الخطية والمعادلة الأسية.

٥-٢-٣ المعادلة الخطية :

يلاحظ أن معظم السلاسل الزمنية يمكن تمثيل اتجاهها العام بمعادلة الخط المستقيم،

$$\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب}\ \text{س}$$

حيث $\hat{\text{ص}}$ = الاتجاه العام للظاهرة، س الفترة الزمنية، أ، ب ثوابت.

هذا وقد تم عند دراسة موضوع الانحدار دراسة هذه المعادلة وتحديد شكلها، ؛ أي تحديد قيم الثوابت أ، ب. وهي كما يلي:

$$\text{ب} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}}$$

$$\text{أ} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}\ \bar{\text{س}}$$

على أنه يلاحظ أن قيم س هنا تكون عبارة عن سنوات مثلاً ١٩٧٠، ١٩٧١، ١٩٧٢،... وأن التعامل مع مثل هذه الأرقام يـزيد من عبء العمل، ويمكن اختصار هذه الأقام بطرح رقم معين من هذه السنوات، وليكن رقم السنة الأولى أي طرح ١٩٧٠ من كل الأرقام التي تمثل س. وبذلك تصبح قيم س كما يلي: صفر، ١، ٢، ٣،... وهكذا. هذا على أن يكون ذلك معلوماً عند تحديد معادلة الاتجاه العام وعند إستخدامها في التقدير، ولذا غالباً ما يشار أمام المعادلة بعبارة (١٩٧٠ = صفر).

□ مثال ١ :

البيان التالي يمثل نسبة الأمية في إحدى المدن في عدة سنوات. والمطلوب:

(أ) تحديد معادلة الاتجاه العام.

(ب) تقدير نسبة الأمية عام ١٩٨٤.

السنة	١٩٧٨	١٩٧٩	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢
نسبة الأمية	٣٠	٢٨	٢٧	٢٥	٢٢

□ الحل:

س	ص	س٢	س ص
صفر	٣٠	صفر	صفر
١	٢٨	١	٢٨
٢	٢٧	٤	٥٤
٣	٢٥	٩	٧٥
٤	٢٢	١٦	٨٨
١٠	١٣٢	٣٠	٢٤٥

(أ) ب = $\frac{٥(٢٤٥) - (١٠)(١٣٢)}{٥(٣٠) - (١٠)^{٢}}$ = ـ١,٩

أ = $\bar{\text{ص}}$ - ب $\bar{\text{س}}$

= $\frac{١٣٢}{٥}$ - (ـ١,٩)($\frac{١٠}{٥}$) = ٣٠,٢

ص = ٣٠,٢ - ١,٩ س (١٩٧٨ = صفر)

(ب) س = ١٩٨٤ - ١٩٧٨ = ٦

ص (٦) = ٣٠,٢ - ١,٩(٦) = ١٨,٨

□ مثال ٢ :

الجدول ا التالي يبين عدد خريجي الجامعات (بالألف) في حدى الدول. والمطلوب:

(أ) تحديد معادلة الاتجاه العام.

(ب) تقدير عدد خريجي الجامعات عام ١٩٨٥.

السنة	١٩٧٦	١٩٧٧	١٩٧٨	١٩٧٩	١٩٨٠	١٩٨١	١٩٨٢
العدد	٤٢	٤٦	٤٩	٥٢	٥٤	٥٥	٥٧

ويتم تكوين الجدول التالي:

س	ص	$\text{س}^{٢}$	س ص
صفر	٤٢	صفر	صفر
١	٤٦	١	٤٦
٢	٤٩	٤	٩٨
٣	٥٢	٩	١٥٦
٤	٥٤	١٦	٢١٦
٥	٥٥	٢٥	٢٧٥
٦	٥٧	٣٦	٣٤٢
٢١	٣٥٥	٩١	١١٣٣

$$ب = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - مجـ\ س\ مجـ\ ص}{ن\ مجـ\ س^2 - (مجـ\ س)^2}$$

$$= \frac{٧(١١٣٣) - (٢١)(٣٥٥)}{٧(٩١) - (٢١)^2} = ٢,٤٢٩$$

$$أ = \bar{ص} - ب\ \bar{س}$$

$$= \frac{٣٥٥}{٧} - (٢,٤٢٩)\ \frac{٢١}{٧} = ٤٣,٤٢٧$$

ص = أ + ب س

= ٤٣,٤٢٧ + ٢,٤٢٩ س

تقدير عدد الخريجين عام ١٩٨٥:

نستخدم س = ٩ (١٩٨٥ ـ ١٩٧٦)

∴ ص = ٤٣,٤٢٧ + ٢,٤٢٩ (٩) = ٦٥ الف

الإتجاه العام للمواسم:

إن الاتجاه العام للظاهرة غالباً ما يتم الحصول عليه من بيانات سنوية. ولأغراض التخطيط، غالباً ما نحتاج إلى تقديرات، جزئية لفترات أقل السنة، وكما سنرى عند إجراء التحليل الموسمي فإنه يفضل تسهيلاً للعمل تجميع البيانات ثم إيجاد معادلة الاتجاه العام على أساس سنوي، ومنها يمكن التحويل إلى معادلة الإتجاه العام حسب الموسم، أي لفترات اقل من السنة، مثلاً شهرية أو ربع سنوية. وبفرض أن معادلة الاتجاه العام على أساس سنوي هي:

ص = أ + ب س

وبفرض أن السنة تشتمل على عدد قدره ك من المواسم، تكون معادلة الإتجاه العام حسب الموسم كما يلي:

$$ص = \frac{أ}{ك} + \frac{ب}{ك^{٢}} س \qquad (٤-٥٤)$$

ويلاحظ إننا استخدمنا حروف صغيرة لكل من س، ص في المعادلة الموسمية لتمييزها عن السنوية.

□ **مثال ٣ :**

بفرض أن معادلة الاتجاه العام للمبيعات السنوية لإحدى الشركات كما يلي

ص = ١٢٠٠ + ٢٨٨ س (نقطة الأصل ١٩٨٠)

أوجد معادلة الاتجاه العام الشهرية.

□ الحل:

عدد المواسم ك = ١٢

$$ص = \frac{١٢٠٠}{١٢} + \frac{٢٨٨}{(١٢)^{٢}} س$$

$$= ١٠٠ + ٢س$$

ونقطة الأصل تقع في منتصف عام ١٩٨٠ أي في أول يوليو ١٩٨٠.

٥-٢-٤ المعادلة الأسية :

في دراستنا السابقة كنا نفترض أن الاتجاه العام للظاهرة يمثله خط مستقيم ويعني ذلك أن قيمة الظاهرة تتغير (زيادة أو نقصان) بمعدل ثابت. وهذه العلاقة الخطية تلاحظها ويمكن افتراضها في عدد كبير من الحالات. على أن هناك بعض الظواهر لا يكون فيها معدل التغير ثابتاً، بل تكون نسبة التغير ثابتة، ويمكن توضيح ذلك بالسلسلتين التاليتين:

الزمن	١	٢	٣	٤
متغير ص١	٤	٦	٨	١٠
متغير ص٢	٤	٦	٩	١٣,٥

فالمتغير ص١ يزيد بمعدل ثابت وهو ٢ بينما المتغير ص يزيد بنسبة ثابتة وهي ٥٠٪. وهناك الكثير من الظواهر التي تتغير بنسبة ثابتة، كنمو السكان، وعدد المواليد، وبصفة عامة كافة الكائنات الحية، كنمو عدد الحيوانات والطيور والأسماك والحشرات، والبكتريا وكذلك هناك الكثير من المتغيرات الاقتصادية والمالية وخاصة عند إستخدام الفوائد المركبة وكذا إنتاج الشركات، ومبيعاتها وأرباحها.

والمعادلة الأسية تعبر عن هذا النهج من التغير، وهي على الصيغة

ص = أ ب^س حيث أ، ب ثوابت. (٤-٥٥)

ويصبح المطلوب هو تحديد قيمة الثوابت أ، ب، ويسهل ذلك إذا ما حولنا هذه المعادلة إلى صورة معادلة الخط المستقيم، ويمكن إجراء هذا التحويل باستخدام اللوغاريتمات، حيث تصبح الدالة اعلاه كما يلي:

لو ص = لو أ + س لو ب (٤-٥٦)

أو ص′ = أ′ + ب′ س

حيث ص′، أ′، ب′ تعني لو ص، لو أ، لو ب.

ويلاحظ أن هذه المعادلة الأخيرة هي معادلة خط مستقيم، ويمكن الحصول على الثوابت أ′، ب′ بنفس الصيغ السابق استخدامها ومنها يمكن الحصول على قيم أ، ب.

ولغرض تقدير قيمة الظاهرة فإنه يمكناستخدام أي من المعادلتين سواء المعادلة الأسية أو بعد تحويلها إلى معادلة لوغاريتمية.

□ **مثال ٤ :**

البيان التالي يمثل عدد السكان (مليون) في إحدى الدول. والمطلوب

(أ) تحديد معادلة الاتجاه العام.

(ب) تقدير عدد السكان عام ١٩٩٠.

السنة	١٩٤٠	١٩٥٠	١٩٦٠	١٩٧٠	١٩٨٠
عدد السكان	١٤٤	١٧٣	٢٠٧	٢٤٩	٢٩٨

□ **الحل:**

س	ص	ص′	س٢	س ص′
صفر	١٤٤	٢,١٥٨	صفر	صفر
١	١٧٣	٢,٢٣٧	١	٢,٢٣٧
٢	٢٠٧	٢,٣١٦	٤	٤,٦٣٢
٣	٢٤٩	٢,٣٩٦	٩	٧,١٨٨
٤	٢٩٨	٢,٤٧٤	١٦	٩,٨٩٧
١٠		١١,٥٨٢	٣٠	٢٣,٩٥٤

(أ) ص′ = أ′ + ب′ س

$$\text{ب}' = \frac{\text{٥(٢٣,٩٥٤) - (١٠)(١١,٥٨٢)}}{\text{٥(٣٠) - (١٠)}^{\text{٢}}} = \text{٠,٠٧٩}$$

أ′ = $\bar{\text{ص}}'$ − ب′ $\bar{\text{س}}$

$$= \frac{\text{١١,٥٨٢}}{\text{٥}} - (\text{,٠٧٩})\frac{\text{١٠}}{\text{٥}} = \text{٢,١٥٨٤}$$

ص′ = ٢,١٥٨٤ + ٠٧٩,س.

ولإيجاد المعادلة الأسية، نوجد الأعداد المقابلة للوغاريتمات، ومنها نحصل على ب = ١,١٩٩٥، أ = ١٤٤,٠١٢.

∴ ص = ١٤٤,٠١٢(١,١٩٩٥)^س

(ب) تقدير عدد السكان عام ١٩٩٠

$$س = \frac{١٩٩٠ - ١٩٤٠}{١٠} = \frac{٥٠}{١٠} = ٥$$

ص (٥) = ٢,١٥٨٤ + ٠,٠٧٩(٥) = ٢,٥٥٣٤

وبإيجاد العدد المقابل للوغاريتم: ص = ٣٥٧,٦٠٢

هـذا ويلاحظ أن هـذه النتيجة يمكن الحصـول عليها من المعـادلـة الأصليةأيضاً كما يلي:

ص^٥ = ١٤٤,٠١٢ (١,١٩٩٥)^٥ = ٣٥٧,٦٠١

٥-٢-٥ التغيرات الموسمية :

وهذه يتم التعبير عنها بنسبة مئوية، تسمى النسبة الموسمية أو الدليل الموسمي، ويستخدم لتحديد هذه النسب عدة طرق نعرض منها طريقة نسبة الفعلي إلى الاتجاه العـام (Ratio-t-trend method). وفي هذه الـطريقة يتم احتساب النسبة المئوية لقيمه الظاهرة الفعلية إلى قيمتها الاتجاهية ـ وتكون نسبة الموسم هي متوسط النسب المتعلقة بالموسم. ويلاحظ أن متوسط هذه النسبة الموسمية يساوي ١٠٠ وفي حالة إختلافها تعدل حتى يكون متوسطها ١٠٠. والمثال التالي يوضح الخطوات اللازمة لتحديد النسب الموسمية.

□ **مثال ٥ :**

البيان التالي يوضح مبيعات احدى شركات المياه الغازية (مليون ريال) والمطلوب

١ ـ تحديد معادلة الاتجاه العام على أساس سنوي.

٢ ـ تحديد معادلة الاتجاه العام على أساس ربع سنوي.

٣ ـ تحديد النسب الموسمية

٤ ـ تقدير مبيعات الشركة عام ١٩٨٣ وفصولها.

السنة	الربع الأول	الثاني	الثالث	الرابع
١٩٨٠	١٠	٢٠	٥٠	٢٠
١٩٨١	١٢	٣٠	٨٠	٣٠
١٩٨٢	١٣	٢٥	٧٠	٤٠

□ الحل: (١)

السنة	س	ص	س^2	س ص
١٩٨٠	صفر	١٠٠	صفر	صفر
١٩٨١	١	١٤٠	١	١٤٠
١٩٨٢	٢	١٧٠	٤	٣٤٠
	٣	٤١٠	٥	٤٨٠

$$\text{ب} = \frac{\text{٣}(\text{٤٨٠}) - (\text{٣})(\text{٣١٠})}{\text{٣}\ (\text{٥}) - (\text{٣})^2} = \text{٣٥}$$

$$\text{أ} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}\ \bar{\text{س}}$$

$$= \frac{\text{٤١٠}}{\text{٣}} - \text{٣٥}\ (\tfrac{\text{٣}}{\text{٣}}) = \text{١٠١,٧}$$

$$\text{ص} = \text{١٠١,٧} + \text{٣٥}\ \text{س}$$

نقطة الأصل منتصف عام ١٩٨٠

$$\text{٢} - \text{ص} = \frac{\text{١٠١,٧}}{\text{٤}} + \frac{\text{٣٥}}{(\text{٤})^2}\ \text{س}$$

$$= \text{٢٥,٤} + \text{٢,١٩}\ \text{س}$$

ويلاحظ أن نقطة الأصل هنا تقع بين الموسم الثاني والثالث. ويفضل نقلها إلى نقطة تكون في منتصف أحد المواسم، فإذا اخترنا

منتصف الموسم الأول فإن هذه النقطة تبعد عن السابقة بفترة ونصف ويلزم تعديل المعادلة

ص = ٢٥,٤ - ١,٥(٢,١٩) + ٢,١٩ س

ص = ٢٢,١ + ٢,٢ س

وهنا نقطة الأصل منتصف الربع الأول عام ١٩٨٠

٣ ــ لتحديد النسب المئوية نوجد أولاً القيم الاتجاهية والتي يتم الحصول عليها باستخدام معادلة الاتجاه العام الربع سنوية والسابق إيجادها في (٢). ونقوم بقسمة الرقم الفعلي على رقم الاتجاه العام، وذلك في كل موسم. ولتنظيم العمل على أي حال يفضل أن يتم ذلك في جدول كالآتي حيث نجد في الخلية التي تمثل الموسم ثلاث أرقام هي على الترتيب الرقم الفعلي، الاتجاه العام، النسبة المئوية، والصف الرابع خصص لإيجاد النسب الموسمية وفي كل خلية ثلاث أرقام هي: مجموع النسب بكل فصل، متوسط هذه النسب، وحيث أن مجموع هذه النسب يساوي ٣٩٧ وليس ٤٠٠ تم تعديلها وذلك بضربها في $\frac{٤٠٠}{٣٩٧}$، والنتائج تمثل النسب الموسمية.

٤ ــ الصف الأخير بالجدول يوضح تقدير المبيعات عام ١٩٨٣ وحسب كل موسم. تم أولاً احتساب القيم الاتجاهية باستخدام معادلة الاتجاه العام والسابق الحصول عليها في (٢)، وهي:

ص = ٢٢,١ + ٢,٢ س

وباعتبار أن نقطة الأصل هي الربع الأول عام ١٩٨٠، فإنه لتقدير الاتجاه العام في الربع الأول عام ١٩٨٢ مثلاً، (عــدد الفترات أي س = ١٢)، وعلى ذلك

ص = ٢٢,١ + ٢,٢ (١٢) = ٤٨,٥

وبعد إيجاد قيم الاتجاه العام يتم ضربها في النسب الموسمية للحصول على التقديرات المطلوبة. وعلى سبيل المثال فإن تقدير رقم

المبيعات في الربع الأول عام ١٩٨٠ يكون بضرب قيمة الاتجاه العام في النسبة الموسمية الخاصة بالربع الأول، أي ٤٨,٥ × ٤٢٪ = ٢٠

والبيانات كلها موضحة في الجدول أدناه.

	العام	الربع الأول	الثاني	الثالث	الرابع	مجموع
	١٩٨٠	١٠ ٢٢,١ ٤٥	٢٠ ٢٤,٣ ٨٢	٥٠ ٢٦,٥ ١٨٩	٢٠ ٢٨,٧ ٧٠	١٠٠
	١٩٨١	١٢ ٣٠,٩ ٣٩	٣٠ ٣٣,١ ٩١	٦٨ ٣٥,٣ ١٩٣	٣٠ ٣٧,٥ ٨٠	١٤٠
	١٩٨٢	١٧ ٣٩,٧ ٤٣	٤٠ ٤١,٩ ٩٥	٧٧ ٤٤,١ ١٧٥	٣٦ ٤٦,٣ ٧٨	١٧٠
النسب الموسمية	مجموع النسب النسب الموسمية بعد التعديل (م)	١٢٧ ٤٢ ٤٢	٢٧٨ ٩٣ ٨٤	٥٥٧ ١٨٦ ١٨٧	٢٢٨ ٧٦ ٧٧	 ٣٩٧ ٤٠٠
تقديرات عام ١٩٨٣	الاتجاه العام (ص) التقدير ص × م	٤٨,٥ ٢٠	٥٠,٧ ٤٧	٥٢,٩ ٩٩	٥٥,١ ٤٢	٢٠٧ ٢٠٧

٦ - السلسلة الزمنية التالية تبين عدد الحجاج (بالألف) الوافدين للملكة العربية السعودية. والمطلوب:

(أ) إيجاد معادلة الاتجاه انعام بافتراض معادلة الخط المستقيم.

(ب) تقدير عدد الحجاج عام ١٤٠٥

السنة	١٣٩٦	١٣٩٧	١٣٩٨	١٣٩٩	١٤٠٠	١٤٠١
عدد الحجاج	٧١٩	٧٣٩	٨٣٠	٨٦٣	٨١٣	٨٧٩

□ الحل:

(أ) ص = ٧٣١,٨ + ٣٠,١٤٣س (١٣٩٦ = صفر)

(ب) تقدير عدد الحجاج عام ١٤٠٥ = ٧٣١,٨ + ٣٠,١٤٣(٩) = ١٠٠٣٠٨٧

٧ - السلسلة الزمنية التالية تمثل عدد العاملين (بالألف) في إحدى الصناعات والمطلوب:

(أ) إيجاد معادلة الاتجاه العام بافتراض معادلة الخط المستقيم.

(ب) تقدير عدد العاملين عام ١٤٠٥.

السنة	١٣٩٧	١٣٩٨	١٣٩٩	١٤٠٠	١٤٠١
عدد العاملين	٧	٨	١٠	١١	١٣

□ الحل:

ص = ٦,٨ + ١,٥ س (١٣٩٧ = صفر)

ص(١٤٠٥) = ٦,٨ + ١,٥(٨) = ١٨,٨

٨ ــ استخدم بيانات السلسلة الزمنية الموضحة بالجدول التالي لإيجاد:

(أ) معادلة الاتجاه العام ــ بافتراض معادلة أسية.

(ب) تقدير قيمة ص إذا كانت س = ٧.

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١٦	٤٥	١٣٨	٤٠٢	١٢٥٠

□ الحل:

ب' = ٠,٤٧٤، أ' = ٠,٧١٨

ص' = ,٧١٨ + ٠,٤٧٤س

ص = ٥,٢٢٢ (٢,٩٧٩)س

ص'(٧) = ٠,٧١٨ + ٠,٤٧٤(٧) = ٤,٠٣٦ ومنها ص = ١٠٨٦٤

٩ ــ المطلوب استخدام السلسلة الزمنية الموضحة بالجدول التالي لإيجاد:

(أ) معادلة الاتجاه العام على أساس سنوي.

(ب) معادلة الاتجاه العام على أساس ربع سنوي.

(ج) تحديد النسب الموسمية.

(د) تقدير قيمة الظاهرة بالفصول الأربعة لعام ١٩٨٣.

	الربع الأول	الثاني	الثالث	الرابع
١٩٧٨	٣٦	٣٤	٣٨	٣٢
١٩٧٩	٣٨	٤٨	٥٢	٤٢
١٩٨٠	٤٢	٥٦	٥٠	٥٢
١٩٨١	٥٦	٧٤	٦٨	٦٢
١٩٨٢	٨٢	٩٠	٨٨	٨٠

□ الحـــل :

(أ) ص = ١٢٨ + ٤٨ س

(ب) ص = ٢٧,٥ + ٣س

(ج) النسب الموسمية : ١٠٠، ١١٠، ١٠٣، ٨٧

(د) تقديرات عام ١٩٨٣ : ٨٧,٥، ٩٩,٥، ٩٦,٣، ٨٤

١٠ - فيما يلي بيان برصيد المجموعة المكتبية (الكتب) في عدة سنوات . في إحدى المكتبات .

والمطلوب :

(أ) تحديد معادلة الإتجاه العام

(ب) تقدير عدد الكتب عام ١٤٠٩هـ

السنـــــة	١٤٠٣	١٤٠٤	١٤٠٥	١٤٠٦
عدد الكتب (ألف)	٣٢	٣٧	٤٦	٥٣

س	ص	$س^2$	س ص
٠	٣٢	٠	٠
١	٣٧	١	٣٧
٢	٤٦	٤	٩٢
٣	٥٣	٩	١٥٩
٦	١٦٨	١٤	٢٨٨

$$ب = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - مجـ\ س\ مجـ\ ص}{ن\ مجـ\ س^٢ - (مجـ\ س)^٢}$$

$$= \frac{٤\ (٢٨٨) - (٦)\ (١٦٨)}{٤\ (١٤) - (٦)^٢} = ٧,٢$$

$$أ = \bar{ص} - ب\ \bar{س}$$

$$= \frac{١٦٨}{٤} - ٧,٢\ (\frac{٦}{٤}) = ٣١,٢$$

معادلة الإتجاه العام $\hat{ص} = أ + ب\ س$

$= ٣١,٢ + ٧,٢\ س$

تدير عدد الكتب عام ١٤٠٩ (س = ١٤٠٩ - ١٤٠٦ = ٣)

$\hat{ص} = ٣١,٢ + ٧,٢\ (٣) = ٥٢,٨$

الملحـــق

الصيغ الرياضيــة

المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري

إحداثي التوزيع الطبيعي للإحتمال ق

م_1 - الصيغ الرياضية

وصف متغير وحيد :

$$\text{م} = 1 + 3{,}3\ \text{لو ن} \qquad (٢-١)$$

$$\text{ز} = 360 \times \frac{\text{ك}}{\text{ن}} \qquad (٢-٢)$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س}}{\text{ن}} \qquad (٢-٣)$$

$$\bar{\text{س}} = \bar{\text{د}} + \text{أ} \quad ، \quad \text{س} = \text{د} + \text{أ} \qquad (٢-٤)$$

$$\bar{\text{س}} = \text{ل}\,\bar{\text{د}} \quad ، \quad \text{س} = \text{ل د} \qquad (٢-٥)$$

$$\bar{\text{س}} = \text{ل}\,\bar{\text{د}} + \text{أ} \quad ، \quad \text{س} = \text{ل د} + \text{أ} \qquad (٢-٦)$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س ك}}{\text{ن}} \qquad (٢-٧)$$

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{مجـ س و}}{\text{مجـ و}} \qquad (٢-٨)$$

$$\text{هـ} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}_1\ \text{س}_2\ \cdots\cdots\ \text{س}_\text{ن}} \qquad (٢-٩)$$

$$\text{هـ} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}_1^{\text{ك}_1}\ \text{س}_2^{\text{ك}_2}\ \cdots\cdots\ \text{س}_\text{م}^{\text{ك}_\text{م}}} \qquad (٢-١٠)$$

$$\text{هـ} = \sqrt[\text{مجـ و}]{\text{س}_1^{\text{و}_1}\ \text{س}_2^{\text{و}_2}\ \cdots\cdots\ \text{س}_\text{م}^{\text{و}_\text{م}}} \qquad (٢-١١)$$

$$\text{و} = \text{ب} + \frac{\text{ت} - \text{ك.ص.س}}{\text{ك}} \times \text{ل} \qquad (٢-١٢)$$

$$\text{م} = \text{ب} + \frac{\text{ف}_1}{\text{ف}_1 + \text{ف}_2} \times \text{ل} \qquad (٢-١٣)$$

$$\text{مـ} = ٣\,\text{و} - ٢\,\bar{\text{س}} \qquad (٢-١٤)$$

$$\text{نسبة التغير ق} = \frac{\text{س}_{٢} - \text{س}_{١}}{\text{س}_{١}} \times ١٠٠ \qquad (٢-١٥)$$

$$\text{المعدل المعياري مـ} = \frac{\text{مجـ س و}}{\text{مجـ و}} \qquad (٢-١٦)$$

$$\text{الرقم القياسي لاسبير} = \frac{\text{مجـ س}_{١}\,\text{ك}_{٠}}{\text{مجـ س}_{٠}\,\text{ك}_{٠}} \times ١٠٠ \qquad (٢-١٧)$$

$$\text{الرقم القياسي باش} = \frac{\text{مجـ س}_{١}\,\text{ك}_{١}}{\text{مجـ س}_{٠}\,\text{ك}_{١}} \times ١٠٠ \qquad (٢-١٨)$$

$$\text{القوة الشرائية لوحدة النقد} = \frac{١٠٠}{\text{الرقم القياسي للأسعار}} \qquad (٢-١٩)$$

$$\text{القيمة المعدلة} = \text{القيمة الجارية} \times \text{القوة الشرائية} \qquad (٢-٢٠)$$

$$\text{الرقم القياسي الجديد}\ \text{ق}' = \frac{\text{ق}}{\text{ق}_{٠}} \times ١٠٠ \qquad (٢-٢١)$$

$$\text{ر} = \text{ب} + \frac{\text{ت} - \text{ك}\,.\,\text{ص}\,.\,\text{س}}{\text{ك}} \times \text{ل} \qquad (٢-٢٢)$$

$$\text{جـ} = \text{ب} + \frac{\text{ت} - \text{ك}\,.\,\text{ص}\,.\,\text{س}}{\text{ك}_{٠}} \times \text{ل} \qquad (٢-٢٣)$$

$$\text{ح} = \frac{\text{ر}_{٣} - \text{ر}_{١}}{٢} \qquad (٢-٢٤)$$

$$\text{ح} = \frac{\text{مجـ}\,[\text{س} - \bar{\text{س}}]}{\text{ن}} \qquad (٢-٢٥)$$

$$\sigma^{٢} = \frac{\text{مجـ}\,(\text{س} - \bar{\text{س}})^{٢}}{\text{ن}} \qquad (٢-٢٦)$$

$$\sigma^{٢} = \frac{١}{\text{ن}}\left[\text{مجـ س}^{٢} - \frac{(\text{مجـ س})^{٢}}{\text{ن}}\right] \qquad (٢-٢٧)$$

$$\sigma^2_{\text{س}} = \sigma^2_{\text{د}} \quad ، \quad \text{س} = \text{د} + \text{أ}$$ (٢-٢٨)

$$\sigma^2_{\text{س}} = \text{ل}^2 \sigma^2_{\text{د}} \quad ، \quad \text{س} = \text{ل د}$$ (٢-٢٩)

$$\sigma^2_{\text{س}} = \text{ل}^2 \sigma^2_{\text{د}} \quad ، \quad \text{س} = \text{ل د} + \text{أ}$$ (٢-٣٠)

$$\sigma^2_{\text{س}} = \frac{١}{\text{ن}} \left[\text{مجـ س}^2 \text{ك} - \frac{(\text{مجـ س ك})^2}{\text{ن}} \right]$$ (٢-٣١)

$$\text{م.أ} = \frac{\sigma}{\bar{\text{س}}}$$ (٢-٣٢)

$$\text{د.أ} = \frac{٢ \text{ م خ}}{\text{ن}^2 (\text{م} - ١)}$$ (٢-٣٣)

$$\text{ل}_1 = \frac{\bar{\text{س}} - \text{مـ}}{\sigma}$$ (٢-٣٤)

$$\text{ل}_2 = \frac{٣ (\bar{\text{س}} - \text{و})}{\sigma}$$ (٢-٣٥)

$$\text{ل}_3 = \frac{\text{ر}_3 + \text{ر}_1 - ٢ \text{ ر}_2}{\text{ر}_3 - \text{ر}_1}$$ (٢-٣٦)

$$\text{ل} = \frac{\text{م}_3^2}{(\sigma^2)^3}$$ (٢-٣٧)

$$\text{م}_3 = \frac{\text{مجـ} (\text{س} - \bar{\text{س}})^3 \text{ ك}}{\text{ن}}$$ (٢-٣٨)

$$\text{ت} = \frac{\text{م}_4}{\sigma^4} - ٣$$ (٢-٣٩)

$$\text{م}_4 = \frac{\text{مجـ} (\text{س} - \bar{\text{س}})^4 \text{ك}}{\text{ن}}$$ (٢-٤٠)

$$\text{ج} = \left|\text{مجـ}\ \text{س}_{\text{ر}}\ \text{ك}_{\text{ر}+\text{١}} - \text{مجـ}\ \text{س}_{\text{ر}+\text{١}}\ \text{ك}_{\text{ر}}\right| \qquad (\text{٢}-\text{٤١})$$

$$[\text{س}] = \frac{\text{١٠٠}}{\text{ن}}\ (\text{رتبة س} - \text{٠,٥}) \qquad (\text{٢}-\text{٤٢})$$

$$[\text{س}] = \frac{\text{١٠٠}}{\text{ن}}\ \left[\text{ك.ص.س} + \frac{\text{س} - \text{ب}}{\text{ل}} \times \text{ك}\right] \qquad (\text{٢}-\text{٤٣})$$

$$\text{س}' = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\sigma} \qquad (\text{٢}-\text{٤٤})$$

الدرجة المعيارية المعدلة $\text{ص} = \text{أ} + \text{ب}\ \text{س}'$ $(\text{٢}-\text{٤٥})$

وصف العلاقة بين متغيرين :

$$\text{ر} = \frac{1}{\text{ن}}\ \text{مجـ سَ صَ} \qquad (٤-١)$$

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{2} - (\text{مجـ س})^{2}]\,[\text{ن مجـ ص}^{2} - (\text{مجـ ص})^{2}]}} \qquad (٤-٢)$$

$$\text{ر} = \frac{\text{ن مجـ س ص ك} - \text{مجـ س ك مجـ ص ك}}{\sqrt{[\text{ن مجـ س}^{2}\,\text{ك} - (\text{مجـ س ك})^{2}]\,[\text{ن مجـ ص}^{2}\,\text{ك} - (\text{مجـ ص ك})^{2}]}} \qquad (٤-٣)$$

$$\text{رَ} = 1 - \frac{6\ \text{مجـ ف}^{2}}{\text{ن}\,(\text{ن}^{2} - 1)} \qquad (٤-٤)$$

$$\text{جا} = \frac{\text{أ} - \text{خـ}}{\text{أ} + \text{خـ}} \qquad (٤-٥)$$

$$\text{جا} = \frac{\text{أ د} - \text{ب جـ}}{\text{أ د} + \text{ب جـ}} \qquad (٤-٦)$$

$$\text{تو} = \frac{\text{أ} - \text{خـ}}{0{,}5\ \text{ن}\,(\text{ن}-1)} \qquad (٤-٧)$$

$$\text{ق} = \sqrt{\frac{\text{جـ} - 1}{\text{ع} - 1}} \qquad (٤-٨)$$

$$\text{جـ} = \text{مجـ}\ \frac{(\text{تكرار الخلية})^{2}}{(\text{تكرار الصف})\,(\text{تكرار العمود})} \qquad (٤-٩)$$

$$\text{ق} = \sqrt{\frac{\text{كا}^{2}}{\text{ن}\,(\text{ع} - 1)}} \qquad (٤-١٠)$$

$$\text{كا}^{2} = \text{مجـ}\ \frac{(\text{ش} - \text{ت})^{2}}{\text{ت}} \qquad (٤-١١)$$

$$\text{ت} = \frac{(\text{تكرار الصف})\,(\text{تكرار العمود})}{\text{ن}} \qquad (٤-١٢)$$

$$ل_{س س} = \frac{مجـ ك^{٣} - ك^{٣}_{س}}{ن - ك^{٣}_{س}} \quad (٤-١٣)$$

$$ر + = جتا \frac{١٨٠°}{١ + \sqrt{أ د / ب جـ}} \quad (٤-١٤)$$

$$رَ = \frac{صَ_{١} - صَ_{.}}{\sigma_{س}} \quad \frac{ق_{١} ق_{.}}{أ} \quad (٤-١٥)$$

$$رَ = \frac{صَ_{١} - صَ}{\sigma_{س}} \quad \frac{ق_{١}}{أ} \quad (٤-١٦)$$

$$رَ = \frac{صَ - صَ_{.}}{\sigma_{س}} \quad \frac{ق_{.}}{أ} \quad (٤-١٧)$$

$$رَ_{.} = \frac{صَ_{١} - صَ_{.}}{\sigma_{س}} \quad \sqrt{ق_{١} ق_{.}} \quad (٤-١٨)$$

$$رَ_{.} = \frac{صَ_{١} - صَ}{\sigma_{س}} \quad \sqrt{\frac{ق_{١}}{ق_{.}}} \quad (٤-١٩)$$

$$رَ_{.} = \frac{صَ - صَ_{.}}{\sigma_{س}} \quad \sqrt{\frac{ق_{.}}{ق_{١}}} \quad (٤-٢٠)$$

$$رَ = رَ_{.} \sqrt{\frac{ق_{١} ق_{.}}{أ}} \quad (٤-٢١)$$

$$ى_{ص س} = \frac{\sigma_{صَ}}{\sigma_{س}} \quad (٤-٢٢)$$

$$ى_{س ص} = \frac{\sigma_{صَ}}{\sigma_{س}} \quad (٤-٢٣)$$

$$ر^{*} = \frac{٢}{ن} (صَ_{١} - صَ_{.}) \quad (٤-٢٤)$$

$$\theta = \frac{مجـ |أ_{ل} - ب_{ل}|}{مجـ ن_{ر} ن_{ل}} \quad (٤-٢٥)$$

$$\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{د س} \qquad (٤-٢٦)$$

$$\text{ب} = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^{٢} - (\text{مجـ س})^{٢}} \qquad (٤-٢٧)$$

$$\text{أ} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}\ \bar{\text{س}} \qquad (٤-٢٨)$$

$$\text{ب} = \frac{\text{ن مجـ س ص ك} - \text{مجـ س ك مجـ ص ك}}{\text{ن مجـ س}^{٢}\ \text{ك} - (\text{مجـ س ك})^{٢}} \qquad (٤-٢٩)$$

$$\text{ب} = \acute{\text{ب}} \times \frac{\text{ل ص}}{\text{ل}_{\text{س}}} \qquad (٤-٣٠)$$

النماذج غير الخطية التالية يمكن تحويلها إلى نماذج خطية
(يرجع للتحويلات المناظرة للصيغ (٤-٣١) - (٤-٤٢)

$$\text{ص} = \text{أ هـ}^{\text{ب س}} \qquad (٤-٣١)$$

$$\text{ص} = \text{أ هـ}^{\text{ب/س}} \qquad (٤-٣٢)$$

$$\text{ص} = \text{أ ب}^{\text{س}} \qquad (٤-٣٣)$$

$$\text{ص} = \text{أ س}^{\text{ب}} \qquad (٤-٣٤)$$

$$\text{ص} = \text{أ س}^{\text{ب س}} \qquad (٤-٣٥)$$

$$\text{ص} = \frac{\text{أ}}{\text{س}} \qquad (٤-٣٦)$$

$$\text{ص} = \frac{١}{\text{أ} + \text{ب س}} \qquad (٤-٣٧)$$

$$\text{ص} = \frac{\text{١}}{(\text{أ} + \text{ب س})^{\text{٢}}} \qquad (\text{٤-٣٨})$$

$$\text{ص} = \text{أ} + \text{ب} \sqrt{\text{س}} \qquad (\text{٤-٣٩})$$

$$\text{ص} = \frac{\text{أ}}{\text{س} + \text{ب}} \qquad (\text{٤-٤٠})$$

$$\text{ص} = \frac{\text{أ س}}{\text{س} + \text{ب}} \qquad (\text{٤-٤١})$$

$$\text{ص} = \text{ك أ}^{\text{س ب}} \qquad (\text{٤-٤٢})$$

$$\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب}_{\text{١}}\, \text{س} + \text{ب}_{\text{٢}}\, \text{س}^{\text{٢}} \qquad (\text{٤-٤٣})$$

$$\hat{\text{ص}} = \text{أ} + \text{ب}_{\text{١}}\, \text{س} + \text{ب}_{\text{٢}}\, \text{س}_{\text{٢}} \qquad (\text{٤-٤٤})$$

$$\text{ب}_{\text{١}} = \frac{\text{ط ب} - \text{جـ د}}{\text{و}} \qquad (\text{٤-٤٥})$$

$$\text{ب}_{\text{٢}} = \frac{\text{د هـ} - \text{ط جـ}}{\text{و}} \qquad (\text{٤-٤٦})$$

$$\text{أ} = \bar{\text{ص}} - \text{ب}_{\text{١}}\, \bar{\text{س}}_{\text{١}} - \text{ب}_{\text{٢}}\, \bar{\text{س}}_{\text{٢}} \qquad (\text{٤-٤٧})$$

$$\text{ط} = \text{ن مجـ س}_{\text{١}}\, \text{ص} - \text{مجـ س}_{\text{١}}\, \text{مجـ ص} \qquad (\text{٤-٤٨})$$

$$\text{ب} = \text{ن مجـ س}_{\text{٢}}^{\text{٢}} - (\text{مجـ س}_{\text{٢}})^{\text{٢}} \qquad (\text{٤-٤٩})$$

$$\text{جـ} = \text{ن مجـ س}_{\text{١}}\, \text{س}_{\text{٢}} - \text{مجـ س}_{\text{١}}\, \text{مجـ س}_{\text{٢}} \qquad (\text{٤-٥٠})$$

$$\text{د} = \text{ن مج س}_{\text{٢}}\, \text{ص} - \text{مجـ س}_{\text{٢}}\, \text{مجـ ص} \qquad (\text{٤-٥١})$$

$$\text{هـ} = \text{ن مجـ س}_{١}^{٢} - (\text{مجـ س}_{١})^{٢} \qquad (٤-٥٢)$$

$$\text{و} = \text{هـ ب} - \text{جـ}^{٢} \qquad (٤-٥٣)$$

$$\text{ص} = \frac{\text{أ}}{\text{ك}} + \frac{\text{ب}}{\text{ك}^{٢}} \;\text{س} \qquad (٤-٥٤)$$

$$\text{ص} = \text{أ}\,\text{ب}^{\text{س}} \qquad (٤-٥٥)$$

$$\text{لو ص} = \text{لو أ} + \text{س لو ب} \qquad (٤-٥٦)$$



م٣ – التوزيع الطبيعي المعياري

القيم تقسم على ١٠٠٠

سَ	٠٠	٠١,	٠٢,	٠٣,	٠,٠٤	٠٥,	٠٦,	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠	٠٠٠	٠٠٤	٠٠٨	٠١٢	٠١٦	٠٢٠	٠٢٤	٠٢٨	٠٣٢	٠٣٦
٠,١	٠٤٠	٠٤٤	٠٤٨	٠٥٢	٠٥٦	٠٦٠	٠٦٤	٠٦٨	٠٧١	٠٧٥
٠,٢	٠٧٩	٠٨٣	٠٨٧	٠٩١	٠٩٥	٠٩٩	١٠٣	١٠٦	١١٠	١١٤
٠,٣	١١٨	١٢٢	١٢٦	١٢٩	١٣٣	١٣٧	١٤١	١٤٤	١٤٨	١٥٢
٠,٤	١٥٥	١٥٩	١٦٣	١٦٦	١٧٠	١٧٤	١٧٧	١٨١	١٨٤	١٨٨
٠,٥	١٩٢	١٩٥	١٩٩	٢٠٢	٢٠٥	٢٠٩	٢١٢	٢١٦	٢١٩	٢٢٢
٠,٦	٢٢٦	٢٢٩	٢٣٢	٢٣٦	٢٣٩	٢٤٢	٢٤٥	٢٤٩	٢٥٢	٢٥٥
٠,٧	٢٥٨	٢٦١	٢٦٤	٢٦٧	٢٧٠	٣٧٣	٢٧٦	٢٧٩	٢٨٢	٢٨٥
٠,٨	٢٨٨	٢٩١	٢٩٤	٢٩٧	٣٠٠	٣٠٢	٣٠٥	٣٠٨	٣١١	٣١٣
٠,٩	٣١٦	٣١٩	٣٢١	٣٢٤	٣٢٦	٣٢٩	٣٣١	٣٣٤	٣٣٧	٣٣٩
١,٠	٣٤١	٣٤٤	٣٤٦	٣٤٩	٣٥١	٣٥٣	٣٥٥	٣٥٨	٣٦٠	٣٦٢
١,١	٣٦٤	٣٦٧	٣٦٩	٣٧١	٣٧٣	٣٧٥	٣٧٧	٣٧٩	٣٨١	٣٨٣
١,٢	٣٨٥	٣٨٧	٣٨٩	٣٩١	٣٩٣	٣٩٥	٣٩٦	٣٩٨	٤٠٠	٤٠٢
١,٣	٤٠٣	٤٠٥	٤٠٧	٤٠٨	٤١٠	٤١١	٤١٣	٤١٤	٤١٦	٤١٨
١,٤	٤١٩	٤٢١	٤٢٢	٤٢٤	٤٢٥	٤٢٧	٤٢٨	٤٢٩	٤٣١	٤٣٢
١,٥	٤٣٣	٤٣٥	٤٣٦	٤٣٧	٤٣٨	٤٣٩	٤٤١	٤٤٢	٤٤٣	٤٤٤
١,٦	٤٤٥	٤٤٦	٤٤٧	٤٤٨	٤٤٩	٤٥١	٤٥١	٤٥٣	٤٥٤	٤٥٦
١,٧	٤٥٥	٤٥٦	٤٥٧	٤٥٨	٤٥٩	٤٦٠	٤٦١	٤٦٢	٤٦٣	٤٦٣
١,٨	٤٦٤	٤٦٥	٤٦٦	٤٦٦	٤٦٧	٤٦٨	٤٦٩	٤٦٩	٤٧٠	٤٧١
١,٩	٤٧١	٤٧٢	٤٧٣	٤٧٣	٤٧٤	٤٧٤	٤٧٥	٤٧٦	٤٧٦	٤٧٧
٢,٠	٤٧٧	٤٧٨	٤٧٨	٤٧٩	٤٧٩	٤٨٠	٤٨١	٤٨١	٤٨١	٤٨٢
٢,١	٤٨٢	٤٨٣	٤٨٣	٤٨٣	٤٨٤	٤٨٤	٤٨٥	٤٨٥	٤٨٥	٤٨٦
٢,٢	٤٨٦	٤٨٦	٤٨٧	٤٨٧	٤٨٨	٤٨٨	٤٨٨	٤٨٨	٤٨٩	٤٨٩
٢,٣	٤٨٩	٤٩٠	٤٩٠	٤٩٠	٤٩٠	٤٩١	٤٩١	٤٩١	٤٩١	٤٩٢
٢,٤	٤٩٢	٤٩٢	٤٩٢	٤٩٣	٤٩٣	٤٩٣	٤٩٣	٤٩٣	٤٩٣	٤٩٤
٢,٥	٤٩٤	٤٩٤	٤٩٤	٤٩٤	٤٩٥	٤٩٥	٤٩٥	٤٩٥	٤٩٥	٤٩٥
٢,٦	٤٩٥	٤٩٦	٤٩٦	٤٩٦	٤٩٦	٤٩٦	٤٩٦	٤٩٦	٤٩٦	٤٩٦
٢,٧	٤٩٦	٤٩٧	٤٩٧	٤٩٧	٤٩٧	٤٩٧	٤٩٧	٤٩٧	٤٩٧	٤٩٧
٢,٨	٤٩٧	٤٩٨	٤٩٨	٤٩٨	٤٩٨	٤٩٨	٤٩٨	٤٩٨	٤٩٨	٤٩٨
٢,٩	٤٩٨	٤٩٨	٤٩٨	٤٩٨	٤٩٨	٤٩٨	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩
٣,٠	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩
٣,١	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩
٣,٢	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٤٩٩	٥٠٠	٥٠٠	٥٠٠

م٣ – إحداثي التوزيع الطبيعي للإحتمال ق (أو ١–ق)

القيم تقسم على ١٠٠٠

ق	٠,٠٠٠	٠,٠٠١	٠,٠٠٢	٠,٠٠٣	٠,٠٠٤	٠,٠٠٥	٠,٠٠٦	٠,٠٠٧	٠,٠٠٨	٠,٠٠٩
,٠٠٠	٠٠٠	٠٠٣	٠٠٦	٠٠٩	٠١٢	٠١٥	٠١٧	٠٢٠	٠٢٢	٠٢٤
٠,٠١٠	٠٢٧	٠٢٩	٠٣١	٠٣٤	٠٣٦	٠٣٨	٠٤٠	٠٤٢	٠٤٤	٠٤٦
٠,٠٢٠	٠٤٨	٠٥١	٠٥٣	٠٥٥	٠٥٧	٠٥٨	٠٦٠	٠٦٢	٠٦٤	٠٦٦
٠,٠٣٠	٠٦٨	٠٧٠	٠٧٢	٠٧٤	٠٧٦	٠٧٧	٠٧٩	٠٨١	٠٨٣	٠٨٤
٠,٠٤٠	٠٨٦	٠٨٨	٠٩٠	٠٩١	٠٩٣	٠٩٥	٠٩٧	٠٩٨	١٠٠	١٠٢
٠,٠٥٠	١٠٣	١٠٥	١٠٦	١٠٨	١١٠	١١١	١١٣	١١٤	١١٦	١١٨
٠,٠٦٠	١١٩	١٢١	١٢٢	١٢٤	١٢٥	١٢٧	١٢٨	١٣٠	١٣١	١٣٣
٠,٠٧٠	١٣٤	١٣٦	١٣٧	١٣٩	١٤٠	١٤٢	١٤٣	١٤٤	١٤٦	١٤٧
٠,٠٨٠	١٤٩	١٥٠	١٥٢	١٥٣	١٥٤	١٥٦	١٥٧	١٥٨	١٦٠	١٦١
٠,٠٩٠	١٦٢	١٦٤	١٦٥	١٦٦	١٦٨	١٦٩	١٧٠	١٧٢	١٧٣	١٧٤
٠,١٠٠	١٧٦	١٧٧	١٧٨	١٧٩	١٨١	١٨٢	١٨٣	١٨٤	١٨٦	١٨٧
٠,١١٠	١٨٨	١٨٩	١٩١	١٩٢	١٩٣	١٩٤	١٩٥	١٩٧	١٩٨	١٩٩
٠,١٢٠	٢٠٠	٢٠١	٢٠٢	٢٠٤	٢٠٥	٢٠٦	٢٠٧	٢٠٨	٢٠٩	٢١٠
٠,١٣٠	٢١٦	٢١٣	٢١٤	٢١٥	٢١٦	٢١٧	٢١٨	٢١٩	٢٢٠	٢٢٢
٠,١٤٠	٢٢٣	٢٢٤	٢٢٥	٢٢٦	٢٢٧	٢٢٨	٢٢٩	٢٣٠	٢٣١	٢٣٢
٠,١٥٠	٢٣٣	٢٣٤	٢٣٥	٢٣٦	٢٣٧	٢٣٨	٢٣٩	٢٤٠	٢٤١	٢٤٢
٠,١٦٠	٢٤٣	٢٤٤	٢٤٥	٢٤٦	٢٤٧	٢٤٨	٢٤٩	٢٥٠	٢٥١	٢٥٢
٠,١٧٠	٢٥٣	٢٥٤	٢٥٥	٢٥٦	٢٥٧	٢٥٨	٢٥٩	٢٦٠	٢٦١	٢٦٢
٠,١٨٠	٢٦٢	٢٦٣	٢٦٤	٢٦٥	٢٦٦	٢٦٧	٢٦٨	٢٦٩	٢٧٠	٢٧١
٠,١٩٠	٢٧١	٢٧٢	٢٧٣	٢٧٤	٢٧٥	٢٧٦	٢٧٧	٢٧٧	٢٧٨	٢٧٩
٠,٢٠٠	٢٨٠	٢٨١	٢٨٢	٢٨٣	٢٨٣	٢٨٤	٢٨٥	٢٨٦	٢٨٧	٢٨٧
٠,٢١٠	٢٨٨	٢٨٩	٢٩٠	٢٩١	٢٩١	٢٩٢	٢٩٣	٢٩٤	٢٩٦	٢٩٥
٠,٢٢٠	٢٩٦	٢٩٧	٢٩٨	٢٩٨	٢٩٩	٣٠٠	٣٠١	٣٠١	٣٠٢	٣٠٣
٠,٢٣٠	٣٠٤	٣٠٤	٣٠٥	٣٠٦	٣٠٧	٣٠٧	٣٠٨	٣٠٩	٣١٠	٣١٠
٠,٢٤٠	٣١١	٣١٢	٣١٢	٣١٣	٣١٣	٣١٤	٣١٥	٣١٦	٣١٦	٣١٧
٠,٢٥٠	٣١٨	٣١٨	٣١٩	٣٢٠	٣٢٠	٣٢١	٣٢٢	٣٢٢	٣٢٣	٣٢٤
٠,٢٦٠	٣٢٤	٣٢٥	٣٢٦	٣٢٦	٣٢٧	٣٢٨	٣٢٨	٣٢٩	٣٢٩	٣٣٠
٠,٢٧٠	٣٣١	٣٣١	٣٣٢	٣٣٣	٣٣٣	٣٣٤	٣٣٤	٣٣٥	٣٣٦	٣٣٦
٠,٢٨٠	٣٣٧	٣٣٧	٣٣٨	٣٣٨	٣٣٩	٣٤٠	٣٤٠	٣٤١	٣٤١	٣٤٢
٠,٢٩٠	٣٤٢	٣٤٣	٣٤٣	٣٤٤	٣٤٥	٣٤٥	٣٤٦	٣٤٦	٣٤٧	٣٤٧
٠,٣٠٠	٣٤٨	٣٤٨	٣٤٩	٣٤٩	٣٥٠	٣٥٠	٣٥١	٣٥١	٣٥٢	٣٥٢
٠,٣١٠	٣٥٣	٣٥٣	٣٥٤	٣٥٥	٣٥٥	٣٥٥	٣٥٦	٣٥٦	٣٥٧	٣٥٧
٠,٣٢٠	٣٥٨	٣٥٨	٣٥٩	٣٦٠	٣٦٠	٣٦٠	٣٦٠	٣٦١	٣٦١	٣٦٢

ق	٠,٠٠٠	,٠٠١	,٠٠٢	,٠٠٣	٠,٠٠٤	,٠٠٥	٠,٠٠٦	٠,٠٠٧	٠,٠٠٨	٠,٠٠٩
,٣٣٠	٣٦٢	٣٦٣	٣٦٣	٣٦٤	٣٦٤	٣٦٤	٣٦٥	٣٦٥	٣٦٦	٣٦٦
,٣٤٠	٣٦٦	٣٦٧	٣٦٧	٣٦٨	٣٦٨	٣٦٨	٣٦٩	٣٦٩	٣٧٠	٣٧٠
,٣٥٠	٣٧٠	٣٧١	٣٧١	٣٧٢	٣٧٢	٣٧٢	٣٧٣	٣٧٣	٣٧٣	٣٧٤
,٣٦٠	٣٧٤	٣٧٥	٣٧٥	٣٧٥	٣٧٦	٣٧٦	٣٧٦	٣٧٧	٣٧٧	٣٧٧
,٣٧٠	٣٧٨	٣٧٨	٣٧٨	٣٧٩	٣٧٩	٣٧٩	٣٨٠	٣٨٠	٣٨٠	٣٨٠
,٣٨٠	٣٨١	٣٨١	٣٨١	٣٨٢	٣٨٢	٣٨٢	٣٨٣	٣٨٣	٣٨٣	٣٨٣
,٣٩٠	٣٨٤	٣٨٤	٣٨٤	٣٨٥	٣٨٥	٣٨٥	٣٨٥	٣٨٦	٣٨٦	٣٨٦
,٤٠٠	٣٨٦	٣٨٧	٣٨٧	٣٨٧	٣٨٧	٣٨٨	٣٨٨	٣٨٨	٣٨٨	٣٨٩
,٤١٠	٣٨٩	٣٨٩	٣٨٩	٣٨٩	٣٩٠	٣٩٠	٣٩٠	٣٩٠	٣٩١	٣٩١
,٤٢٠	٣٩١	٣٩١	٣٩١	٣٩٢	٣٩٢	٣٩٢	٣٩٢	٣٩٢	٣٩٢	٣٩٣
,٤٣٠	٣٩٣	٣٩٣	٣٩٣	٣٩٣	٣٩٤	٣٩٤	٣٩٤	٣٩٤	٣٩٤	٣٩٤
٠,٤٤٠	٣٩٢	٣٩٥	٣٩٥	٣٩٥	٣٩٥	٣٩٥	٣٩٥	٣٩٥	٣٩٦	٣٩٦
٠,٤٥٠	٣٩٦	٣٩٦	٣٩٦	٣٩٦	٣٩٦	٣٩٦	٣٩٧	٣٩٧	٣٩٧	٣٩٧
٠,٤٦٠	٣٩٧	٣٩٧	٣٩٧	٣٩٧	٣٩٧	٣٩٧	٣٩٨	٣٩٨	٣٩٨	٣٩٨
٠,٤٧٠	٣٩٨	٣٩٨	٣٩٨	٣٩٨	٣٩٨	٣٩٨	٣٩٨	٣٩٨	٣٩٨	٣٩٨
٠,٤٨٠	٣٩٨	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩
٠,٤٩٠	٣٩٨	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩	٣٩٩
٠,٥٠٠	٣٩٩									

المـراجـــع

(1) Blalok, H. (1979), Social statistics, Mcgrawhill Kogakusha, Ltd., Tokyo.

(2) Guilford, J.P and Fruchter, B. (1978), Fundamental Statistics in Psychology and Education, Mcgraw- hill Kogakusha, Ltd., Tokyo.

(3) Harshbarger, T.R. (1977), Introductory Statistics: A Decision map, Macmillan Publishing Co., Inc., New york.

(4) Loether, H.J and Mctavish, D.G (1980), Descriptire and Inferential Statistics, Allyn and Bacon, Inc., Boston, London.

المؤسسة العصرية للنشر والترجمة .